Algebra z geometrią analityczną - MAP1015, MAP1016, MAP1017

Spis list zadań

1. *Lista zerowa*: Przykładowe zadania szkolne.
2. *Lista pierwsza* : Podstawowe własności macierzy i wyznaczników.
3. *Lista druga* : Macierze odwrotne, układy równań liniowych i eliminacja Gaussa.
4. *Lista trzecia* : Dowolne układy równań liniowych, twierdzenie Kroneckera-Capellego i wzory Cramera.
5. *Lista czwarta*: Podstawowe własności liczb zespolonych.
6. *Lista piąta*: Obliczanie pierwiastków n-tego stopnia liczby zespolonej i rozkład funkcji wymiernej na sumę rzeczywistych ułamków prostych.
7. *Lista szósta*: Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^3$ i płaszczyzny.
8. *Lista siódma*: Proste w przestrzeni i krzywe drugiego stopnia na płaszczyźnie.
9. *Lista ósma*: Struktury algebraiczne - grupy.
10. *Lista dziewiąta*: Zastosowania algebry i geometrii analitycznej w technice.
11. *Lista dziesiąta*: Powtórka.

Uwaga. Niektóre z zadań są zaczerpnięte lub wzorowane na zadaniach z niżej podanych książek. Przy niektórych z tych zadań cytuję książkę źródłową.

Literatura

[1] H. Anton, Ch. Rorres, *Elementary Linear Algebra. Applications Version*, 6th Edition, Wiley, New York 1991.

[2] M. Bryński, *Elementy teorii grup, Zajęcia fakultatywne w grupie matematyczno-fizycznej*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1975.

[3] O. Cuberbiller, *Zadania i ćwiczenia z geometrii analitycznej*, PWN, Warszawa 1966.

[4] N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977.

[5] N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1973.

[6] D.K. Faddiejev, I.S. Sominskij, Zbornik zadac po wyzszej algebrie, Nauka, Moskwa 1968.

[7] M. Gewert, Zb. Skoczylas (red.), *Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy*, wyd. 5, GiS, Wrocław 2001.

[8] H.D. Ikramov, *Zadacznik po liniejnoj algebrie*, Nauka, Moskwa 1975.

[9] W. Jankowski, J. Kaczmarski, *Liczby zespolone i zmienne zespolone, Zajęcia Fakultatywne*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1974.

[10] T. Jurlewicz, *Powtórka od A do Z z algebry liniowej 1*, YUMA, Wrocław 1996.

[11] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, wyd. 9, GIS, Wrocław 2002.

[12] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra Liniowa 1. Przykłady i zadania*, wyd. 7, GiS, Wrocław 2001.

[13] E. Kącki, D. Sadowska, L. Siewierski, *Geometria analityczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1993.

[14] J. Klukowski, I. Nabiałek, *Algebra* dla studentów, WNT, Warszawa 1999.

[15] A.I. Kostrikin (red.), *Zadania z algebry*, PWN, Warszawa 1995.

[16] I.W. Proskuriakov, Zbornik zadacz po liniejnoj algebrie, Nauka, Moskawa 1970.

[17] S. Przybyło, A. Szlachtowski, *Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach*, WNT, Warszawa 1998.

[18] J. Rutkowski, *Algebra abstrakcyjna w zadaniach*, PWN, Warszawa 2000.

[19] W. Stankiewicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*, wyd. 11, PWN, Warszawa 2001.

<u>Lista zerowa</u> - przykładowe zadania szkolne

<u>Temat</u>: *Przypomnienie wybranych podstawowych pojęć z programu matematyki w szkole.*

<u>Pomocnicza literatura do listy zerowej</u>

1. D. i M. Zakrzewscy, *Repetytorium z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia*, Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2000.
2. R. Leitner, W. Żakowski, *Matematyka dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne*, WNT, Warszawa 1978.

Zadanie 0.1

Zapisać następujące trójmiany kwadratowe w postaci kanonicznej: $x^2+2x,\ 4x^2-4x-1$.

Zadanie 0.2

Zbadać, czy można rozłożyć na czynniki liniowe rzeczywiste następujące trójmiany kwadratowe: $x^2-2x-24, \quad x^2-mx-2m^2, \quad x^2-7, \quad 2x^2-x-1, \quad x^2+2$. Jeśli tak, to wyznaczyć ten rozkład.

Zadanie 0.3

Podać wzór skróconego mnożenia dla $(a+b)^3$. Obliczyć $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ i przedstawić a^3+b^3 w postaci iloczynu odpowiednich wyrażeń. Wykorzystać otrzymane wzory do przedstawienia w postaci iloczynu następujących wyrażeń: $x^3-1,\ x^3+8$.

Zadanie 0.4

Uprościć wyrażenia wymierne $(1-x^3)/(3+3x+3x^2)$ i $(2x^2-x)/(2x)$.

Zadanie 0.5

Wyprowadzić wzory na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego (wzory Viete'a). Wyróżniki ("delty")podanych wielomianów są dodatnie. Obliczyć sumę i iloczyn pierwiastków następujących trójmianów (bez obliczania pierwiastków):
$x^2-8x+12, \quad -3x^2+5x+2$.

Zadanie 0.6

Niech $d=a/(b-\sqrt{c^2+1})$. Przekształcić prawą stronę tak, by w mianowniku nie było pierwiastka.

Zadanie 0.7

Niech dla $\alpha \in [0,2\pi]$. Podać wartości kąta α, dla

(a) wartości sinusa

  (i) $s=1/2$,
  (ii) $s=-1/2$,

(b) wartości cosinusa

  (i) $c=1/2$,
  (ii) $c=-1/2$,

(c) jednocześnie danych następujących par wartości sinusa i cosinusa:

$$s = 1/2,\ c = \sqrt{3}/2; \qquad s = 1/2,\ c = -\sqrt{3}/2,$$
$$s = -1/2,\ c = \sqrt{3}/2; \qquad s = -1/2,\ c = -\sqrt{3}/2.$$

Zadanie 0.8

Skorzystać z następujących tożsamości trygonometrycznych

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

do obliczenia wartości $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ oraz do wyrażenia $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ i $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ za pomocą sinusa i cosinusa kąta α.

Zadanie 0.9

Dla jakich wartości parametru t pierwiastki równania $x^2 + \frac{1}{t}x + t^2 = 0$ są równe sinusowi i cosinusowi tego samego kąta ostrego?

Zadanie 0.10

Zapisać w prostszej postaci wyrażenie

$$\left(\frac{a^{-6}d^{-4}}{b^{-3}c^4}\right)^{-2}\left(\frac{a^4b^{-2}}{c^{-2}d^{-3}}\right)^{-3}.$$

Zadanie 0.11

Wykonać potęgowanie $(a^{1/2} + a^{3/2})^2$.

Zadanie 0.12

Wykonać działania

$$\frac{1}{x-3} - \frac{3}{2x+6} - \frac{x}{2x^2 - 12x + 18}.$$

Zadanie 0.13

Znaleźć liczby a i b takie, by funkcje wymierne $f(x)$ i $g(x)$ były równe

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}, \quad g(x) = \frac{5x-1}{x^2-1}.$$

Zadanie 0.14

([1], str. 124) Niech $\vec{\mathbf{a}} = [2, k], \vec{\mathbf{b}} = [3, 5]$. Wyznaczyć wartości parametru k tak, by

(a) wektory $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ były równoległe,

(b) wektory $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ były prostopadłe,

(c) kąt między $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ był równy $\pi/3$.

Zadanie 0.15

Wyprowadzić wzór na współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach

$$A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B),\ C(x_C, y_C),$$

wykonując działania na odpowiednich wektorach.

Zadanie 0.16

Dane są punkty: $A(1,3),\ B(4,7),\ C(2,8),\ D(-1,4)$. Sprawdzić, że są one wierzchołkami równoległoboku. Obliczyć pole tego równoległoboku.

Zadanie 0.17

Wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(-3,-4)$ i $B(1,0)$.

Zadanie 0.18

Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(1,1)$ i tworzącej kąt $\pi/3$ z dodatnim kierunkiem osi Ox.

Zadanie 0.19

Wyznaczyć kąt między prostymi $y = x$ i $y = -x$.

Zadanie 0.20

Sprawdzić, czy podane trójki punktów należą do tej samej prostej

(a) $A(0,5),\ B(2,1),\ C(-1,7)$,

(b) $A(2,0),\ B(-4,-3),\ C(3,\frac{1}{3})$.

Zadanie 0.21

Mając dane równania prostych zawierających dwa boki równoległoboku: $x - 3y = 0$ i $2x + 5y + 6 = 0$, oraz współrzędne jednego z wierzchołków: $C(4,-1)$, napisać równania prostych zawierających pozostałe boki równoległoboku.

Zadanie 0.22

Obliczyć odległość punktu $A(4,5)$ od prostej $x - y + 4 = 0$, bez stosowania wzoru na odległość punktu od prostej.

Zadanie 0.23

Rozwiązać układ równań $mx + (2m-1)y = 3m,\ x + my = m$. Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie tego układu jest parą liczb o różnych znakach?

Zadanie 0.24

Dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia prostych $3x + 4y = 5m - 7,\ x - 4y = m + 3$ należy do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych?

Zadanie 0.25

Dla jakich wartości parametru m proste $(3m+2)x + (1-4m)y + 8 = 0, \quad (5m-2)x + (m+4)y - 7 = 0$ są prostopadłe (równoległe)?

Zadanie 0.26

Dane są proste o równaniach $y = x + m + 1,\ y = 2x - 2m$. Dla jakich wartości m punkt przecięcia prostych należy do wnętrza koła o promieniu $\sqrt{5}$ i środku w początku układu współrzędnych?

Lista pierwsza - Podstawowe własności macierzy i wyznaczników

Działania na macierzach, transponowanie macierzy, rozwiązywanie prostych równań macierzowych, obliczanie wyznaczników, elementarne przekształcenia wyznaczników, wyznacznik macierzy transponowanej, badanie osobliwości macierzy, zastosowania twierdzenia Cauchy'ego.

Uwaga. Symbol $\mathbb{R}^{m\times n}$ oznacza zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych $A = [a_{ij}]$ o m wierszach i n kolumnach. Analogicznie oznacza się zbiór macierzy zespolonych: $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Pytania

1. Kiedy dwie macierze są równe?
2. Czy mnożenie macierzy jest działaniem przemiennym i łącznym? Podać definicję tych działań oraz przykłady ilustrujące odpowiedź.
3. Niech A będzie macierzą prostokątną rzeczywistą. Czy elementy na głównej przekątnej macierzy A^TA mogą być ujemne? Dlaczego? Podać wzory na elementy na głównej przekątnej macierz A^TA. *Uwaga.* A^T oznacza macierz transponowaną.
4. Jakie elementarne przekształcenia wyznacznika nie zmieniają jego wartości?
5. Jakie elementarne przekształcenie wyznacznika zmieni znak wyznacznika?
6. Niech macierz A będzie symetryczna. Czy $\det A^TA = (\det A)^2$? Z jakich własności wyznaczników wynika odpowiedź? Czy prawdą jest, że $\det A^T = \det A$ dla dowolnych macierzy kwadratowych?
7. Niech A będzie macierzą nieosobliwą. Dlaczego wówczas A nie może mieć dwóch takich samych kolumn? A czy może mieć dwa takie same wiersze?
8. Czy iloczyn dwóch macierzy nieosobliwych stopnia n jest macierzą nieosobliwą? Z jakiego twierdzenia wynika odpowiedź?
9. Kiedy macierz górna trójkątna jest nieosobliwa?
10. Jaki jest warunek konieczny i dostateczny na istnienie macierzy odwrotnej A^{-1}? Podać definicję macierzy odwrotnej.
11. Niech macierze A i B stopnia n będą nieosobliwe. Dlaczego istnieje macierz odwrotna $(AB)^{-1}$? Jak macierz odwrotna $(AB)^{-1}$ wyraża się za pomocą macierzy A^{-1} i B^{-1}?

Lista pierwsza - zadania podstawowe

Zadanie 1.1

Sumę n składników $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ zapisuje się w skrócie za pomocą znaku sumy w następujący sposób:

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Udowodnić następujące wzory, wynikające z własności dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych:

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k c_k,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_j b_i.$$

Zadanie 1.2

Niech $C = [c_{ij}] = AB$, gdzie $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Podać wzór dla elementów c_{ij}.

Zadanie 1.3

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć następujące macierze (jeśli to możliwe)

1. $D + E, \quad 5A, \quad -3(D + 2E)$.
2. $AB, \quad BA, \quad (AB)C, \quad A(BC), \quad CC^T, \quad (DA)^T, \quad A^T D^T$.
3. $(A^T)^T, \quad D^T - E^T, \quad (D - E)^T, \quad B^T + 5C^T$.

Zadanie 1.4

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

i niech $a = 4$. Sprawdzić dla tych macierzy, że

1. $A + (B + C) = (A + B) + C, \quad (AB)C = A(BC)$,
2. $a(BC) = (aB)C = B(aC), \quad (B + C)A = BA + CA$.

Zadanie 1.5

(a) ([1], str. 64, [12], str. 74, 75) Podać wymiar i wyznaczyć macierz X spełniającą równanie

$$X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3, \end{bmatrix}.$$

Wskazówka. Skorzystać z definicji mnożenia macierzy. Ile wierszy i kolumn muszą mieć macierze X?

(b) ([16], str. 115) Znaleźć wszystkie macierze X przemienne z macierzą A, tzn. takie, że $AX = XA$ dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

To samo wykonać dla

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Niech macierz AB będzie macierzą zerową. Wykazać, że stąd nie wynika, że co najmniej jedna z macierzy A i B musi być macierzą zerową? Odpowiedź zilustrować przykładami. *Wskazówka.* Na przykład rozwiązać równanie macierzowe

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1.6

(a) Zakładamy, że $\det(A) = -5$. Obliczyć $\det(3A)$, $\det(2A^{-1})$, $\det((2A)^{-1})$.

(b) ([12], str. 98) Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy A stopnia n, jeśli

$$a)\ A^2 = 8A^{-1}, \quad (b)\ A^3 - A = 0, \quad (c)\ A^T = 4A^{-1}?$$

(c) Podać przykład niezerowej macierzy stopnia 4, której wyznacznik jest równy zero.

(d) Podać przykład macierzy A i B takich, że $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ oraz takich, że zachodzi równość.

(e) Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $p \in \mathbb{R}$. Wykazać, że $pA = \operatorname{diag}(p, \dots, p)A$ i korzystając z twierdzenia Cauchy'ego udowodnić, że $\det(pA) = p^n \det(A)$.
Uwaga. Napis $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ oznacza macierz przekątniową stopnia n z elementami $d_1, \dots, d_n$ na głównej przekątnej.

(f) ([1], str. 84) Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & s & f \end{bmatrix}.$$

Jaki jest związek między wyznacznikami macierzy A i B?

(g) ([1], str. 84) Bez bezpośredniego obliczania wyznacznika wykazać, że dla $x = 0$ i $x = 2$ poniższy wyznacznik jest równy zero

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

(h) ([15], str. 34) Obliczyć (bez rozwijania) wyznacznik

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{1}{2}(x+z) & \frac{1}{2}(x+y) & \frac{1}{2}(y+z) & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 1.7

(a) Podać wzór na wyznacznik dowolnej macierzy $A = [a_{ij}]$ stopnia 3, rozwijając go względem drugiej kolumny.

(b) Obliczyć wyznacznik macierzy A, rozwijając go względem trzeciego wiersza

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Obliczyć następujące wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}.$$

(d) ([15], str. 37) Zastosować elementarne przekształcenia do obliczenia następujących wyznaczników

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 1.8

(a) ([1], str. 85) Dla jakich wartości parametru p istnieje macierz odwrotna do macierzy

$$\begin{bmatrix} p-3 & -2 \\ -2 & p-2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ p & 3 & 2 \end{bmatrix}?$$

(b) Zapisać wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -x & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -x & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -x & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -x \end{bmatrix}$$

w postaci wielomianu zmiennej x. Dla jakich wartości x macierz A jest nieosobliwa?

__Lista pierwsza - zadania uzupełniające__

Zadanie 1.9

(a)

(i) Dla jakich macierzy kwadratowych A i B zachodzi $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$?

(ii) Podać przykład macierzy kwadratowych A i B, dla których $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Pokazać, że jeśli macierz A ma k-ty wiersz zerowy i macierz B jest taka, że iloczyn AB jest poprawnie określony, to macierz AB ma też zerowy wiersz. Który?

(c) ([15], str. 48) Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą stopnia 2. Wykazać, że macierz A jest rozwiązaniem równania macierzowego $X^2 - tX + (\det A)I = 0$, gdzie $t = a_{11} + a_{22}$, I jest macierzą jednostkową stopnia 2.

(d) Niech A ma n kolumn i niech macierz jednokolumnowa B_j będzie utworzona z j-tej kolumny macierzy jednostkowej I stopnia n. Wykazać, że elementami macierzy AB_j są elementy j-tej kolumny macierzy A.

(e) Niech A będzie macierzą dowolną macierzą stopnia 3 i niech

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & f & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $C_k = E_kA, D_k = AE_k$ dla $k = 1, 2, 3, 4$. Czym obliczone macierze różnią się od macierzy A? Co w związku z tym macierze E_k mają wspólnego z elementarnymi przekształceniami wykonywanymi na wierszach lub kolumnach macierzy A? Jaki jest związek między wyznacznikami macierzy A, C_k i D_k?

Zadanie 1.10

([12], str. 97) Obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

wykonując elementarne przekształcenia kolumn. W jakiej kolejności najlepiej to zrobić? Jak ten sposób obliczania wyznacznika można uogólnić na przypadek wyznacznika macierzy stopnia n, która ma poniżej głównej przekątnej wszystkie elementy równe 1, a pozostałe równe 4? *Wskazówka.* Zwrócić uwagę, czym różnią się dwie sąsiednie kolumny.

Zadanie 1.11

Udowodnić następujący wzór na *wyznacznik Vandermonde'a* (Van der Monde'a) stopnia n (z prawej strony równości jest podwójny iloczyn)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k,l=1,k>l}^{n} (x_k - x_l).$$

Wskazówka. Pomnożyć $(n-1)-$szą kolumnę przez x_n i odjąć od ostatniej kolumny. Następnie pomnożyć $(n-2)-$gą kolumnę przez x_n i odjąć od kolumny $(n-1)-$szej itd. Wreszcie pierwszą kolumnę pomnożyć przez x_n i odjąć od drugiej. Rozwinąć tak przekształcony wyznacznik względem $n-$tego wiersza i zauważyć, że zadanie zredukowało się do zadania z wyznacznikiem Vandermonde'a stopnia $n-1$.

Zadanie 1.12

([15], str. 36) *Ciągiem Fibonacciego* nazywa się ciąg d_n $(n = 1, 2, \ldots)$, którego dwa pierwsze wyrazy d_1 i d_2 są równe 1, a każdy następny wyraz jest równy sumie dwóch wyrazów go poprzedzających. Udowodnić, że $(n+1)-$szy wyraz ciągu Fibanacciego d_{n+1} jest równy następującemu wyznacznikowi w_n stopnia n:

$$w_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wskazówka. Rozwinąć wyznacznik w_n względem ostatniej kolumny i udowodnić indukcyjnie, że wyznaczniki w_n spełniają związek rekurencyjny $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$, gdzie $w_0 = 1$.

Zadanie 1.13

Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i niech I będzie macierzą jednostkową stopnia n. Łatwo sprawdzić, że $w(x) = \det\,(A - xI)$ jest wielomianem stopnia n ze współczynnikiem $(-1)^n$ przy najwyższej potędze. Ten wielomian nazywa się *wielomianem charakterystycznym macierzy* A, a jego pierwiastki nazywają się *wartościami własnymi macierzy* A.

(a) Wyznaczyć pierwiastki wielomianu charakterystycznego dla macierzy (zob. [8], str. 155)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pokazać, że $\det\,(xI - A) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

<u>Lista druga</u> - Macierze odwrotne, układy równań liniowych i eliminacja Gaussa.

Wyznaczanie macierzy odwrotnych za pomocą dopełnień algberaicznych, zastosowanie macierzy odwrotnych do rozwiązywania układów równań liniowych, układy równań liniowych z macierzą trójkątną, rozwiązywanie układów równań liniowych za pomocą eliminacji Gaussa.

Pytania

1. Co to jest dopełnienie algebraiczne elementu macierzy?
2. Jak można za pomocą dopełnień algebraicznych zapisać wzór na rozwinięcie Laplace‘a wyznacznika?
3. Jak można wyznaczyć macierz odwrotną za pomocą dopełnień algebraicznych, a jak za pomocą rozwiązywania odpowiednich układów równań liniowych?
4. Jaki jest związek między wyznacznikiem macierzy nieosobliwej A i wyznacznikiem macierzy odwrotnej A^{-1}?
5. Jak można rozwiązać się układ równań liniowych $AX = B$ z macierzą trójkątną A, której wszystkie elementy na głównej przekątnej są niezerowe?
6. Za pomocą jakiego przekształcenia elementarnego można wyzerować element macierzy na pozycji $(2, 1)$? Które elementy macierzy ulegną zmianie po tym przekształceniu?
7. Kiedy w trakcie eliminacji Gaussa powinno się przestawić dwa wiersze? Podać przykład ilustrujący odpowiedź.
8. Jaki zmieni się macierz układu równań liniowych, jeśli zmienimy numerację niewiadomych, na przykład przestawimy pierwszą niewiadomą z drugą?

Lista druga - zadania podstawowe

Zadanie 2.1

(a) Wykazać, że $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, korzystając z definicji macierzy odwrotnej i własności transponowania macierzy.

(b) Niech A będzie macierzą symetryczną nieosobliwą. Czy macierz odwrotna A^{-1} też będzie symetryczna? Jak to uzasadnić?

Zadanie 2.2

([16], str. 113) Obliczyć

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5,$$

korzystając z zależności

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że z prawej strony równości macierz występująca na prawo od macierzy przekątniowej jest odwrotnością macierzy występującej na lewo od przekątniowej. Skorzystać z łączności mnożenia macierzy.

Zadanie 2.3

Wyznaczyć wszystkie minory stopnia 2 i dopełnienia algebraiczne elementów macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.4

(a) Wyznaczyć za pomocą macierzy dołączonej (dopełnień algebraicznych) macierz odwrotną A^{-1} dla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić wyniki pokazując, że $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

(b) Ostatnia macierz A z zadania 2, podpunktu (a) jest trójkątna górna. Jak wykorzystać to przy obliczaniu macierzy odwrotnej za pomocą dopełnień algebraicznych? *Wskazówka.* Zobacz zadanie 2.10b z listy zadań uzupełniających.

Zadanie 2.5

(a) ([19], str. 95) Znaleźć macierz X spełniającą równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dlaczego taka macierz X istnieje? Czy jest jednoznaczna? *Wskazówka.* Niech macierz G będzie nieosobliwa. Wykazać, że macierz $Y = G^{-1}C$ jest rozwiązaniem równania macierzowego $GY = C$. Z jakich własności mnożenia macierzy korzysta się w dowodzie?

(b) Rozwiązać równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.6

Zapisać poniższy układ równań liniowych w postaci macierzowej $AX = B$

$$-2b + 3c = 1, \quad 3a + 6b - 3c = -2, \quad 6a + 6b + 3c = 5.$$

Czy macierz A tego układu jest nieosobliwa?

Zadanie 2.7

(a) Wyznaczyć trzecią kolumnę macierzy odwrotnej do macierzy trójkątnej górnej z zadania 2a, rozwiązując odpowiedni układ równań liniowych.

(b) Wyznaczone w zadaniu 2a macierze odwrotne zastosować do rozwiązania układów $AX = B$, gdzie macierz jednokolumnowa B jest pierwszą kolumną macierzy jednostkowej odpowiedniego stopnia. Zauważyć, że wtedy obliczone rozwiązanie jest równe pierwszej kolumnie macierzy odwrotnej A^{-1}.

Zadanie 2.8

(a) Zastosować elementarne przekształcenia, stosowane w eliminacji Gaussa, do przekształcenia macierzy A do postaci górnej trójkątnej

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy wyznaczniki otrzymanych po tych przekształceniach macierzy uległy zmianie? Dlaczego?

(b) ([1], str. 60) Za pomocą elementarnych przekształceń (eliminacji Gaussa) przekształcić poniższy układ równań liniowych do układu z macierzą górną trójkątną

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1, \quad x_1 + x_3 = b_2, \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3.$$

Jakie warunki muszą spełniać współczynniki b_1, b_2, b_3, aby ten układ równań liniowych miał rozwiązanie? *Wskazówka.* Jak wygląda ostatnie równanie otrzymanego układu równań i co z jego postaci wynika?

To samo wykonać dla następującego układu

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1, \quad 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2, \quad x_1 + 8x_3 = b_3.$$

Czy ten układ ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych b_1, b_2, b_3? Zbadać, czy macierze obu układów są nieosobliwe.

Zadanie 2.9

([1], str. 18, 19) Za pomocą eliminacji Gaussa, z ewentualnym przestawianiem wierszy, rozwiązać układy równań liniowych $AX = B$ dla następujących par danych A i B:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \\ B = [5, 3, 4]^T, \end{cases} \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}, \\ \\ B = [8, 1, 10]^T, \end{cases} \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \\ \\ B = [0, 1, -1]^T, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \\ \\ B = [-1, -2, 1, -3]^T, \end{cases} \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \\ B = [6, 4, 4, 6]^T. \end{cases}$$

Lista druga - zadania uzupełniające

Zadanie 2.10

(a) Udowodnić, że iloczyn dwóch macierzy trójkątnych górnych tego samego stopnia jest też macierzą trójkątną górną.

(b) Wykazać, że macierz odwrotna do nieosobliwej macierzy trójkątnej górnej jest też trójkątna górna. Które dopełnienia algebraiczne są na pewno równe zero?

Zadanie 2.11

([1], str. 65) Zapisać równania

$$y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \quad y_2 = 3x_1 + x_2 - 4x_3, \quad y_3 = -2x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$

oraz

$$z_1 = 4y_1 - y_2 + y_3, \quad z_2 = -3y_1 + 5y_2 - y_3$$

w macierzowej postaci $Y = AX$ i $Z = BY$. Wykorzystać je do otrzymania bezpośredniego związku między Z i X, czyli do wyznaczenia macierzy C takiej, że $Z = CX$. Zastosować ten związek do wyrażenia z_1 i z_2 przez x_1, x_2 i x_3. Sprawdzić otrzymane wyniki przez odpowiednie podstawienia do równań.

Zadanie 2.12

(a) Macierz rzeczywista Q nazywa się *ortogonalna* jeśli spełnia warunek $Q^{-1} = Q^T$. Zbadać, czy poniższe macierze są ortogonalne

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jakie wartości może przyjmować wyznacznik macierzy ortogonalnej?

(b) Niech A będzie macierzą nieosobliwą i niech U, V będą macierzami jednokolumnowymi. Wówczas macierz $V^T A^{-1} U$ jest stopnia 1, czyli ma tylko jeden element. Niech ten jej jedyny element a będzie różny od jedynki, $a \neq 1$. Korzystając z definicji macierzy odwrotnej, udowodnić następujący *wzór Shermana-Morrisona*:

$$(A - UV^T)^{-1} = A^{-1} + \frac{1}{1-a} A^{-1} U V^T A^{-1}.$$

(c) Niech macierz J_n stopnia n ma wszystkie elementy równe 1. Zastosować wzór Sherman-Morrisona do wykazania, że $(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$. A jak to można udowodnić bezpośrednio z definicji macierzy odwrotnej? *Wskazówka.* Zauważyć, że macierz J_n jest iloczynem macierzy jednokolumnowej o wszystkich elementach równych 1 i macierzy jednowierszowej o wszystkich elementach równych 1.

Zadanie 2.13

Blokiem wymiaru $p \times q$ macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy jej podmacierz utworzoną przez elementy a_{ij} leżące na przecięciu ustalonych p wierszy i q kolumn. Na przykład macierz kwadratowa A stopnia n może być podzielona w następujący sposób na cztery bloki

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

gdzie bloki A_{11} i A_{22} są macierzami kwadratowymi stopnia k i $n-k$, odpowiednio. Macierze w postaci blokowej nazywa się też macierzami blokowymi. Działania na macierzach blokowych wykonuje się zgodnie z tymi samymi zasadami, co na macierzach o elementach liczbowych.

Niech macierz kwadratowa B stopnia n będzie podzielona na bloki tak jak powyżej macierz A. Łatwo można pokazać, że iloczyn AB można zapisać w następującej postaci blokowej:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}, & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}, & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

W szczególności A^2 można zapisać tak:

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_{11}A_{11} + A_{12}A_{21}, & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21}, & A_{21}A_{12} + A_{22}A_{22} \end{bmatrix}.$$

(a) Niech blok A_{21} będzie zerowy, a bloki przekątniowe A_{11} i A_{22} niech będą nieosobliwe. Wykazać (korzystając z definicji macierzy odwrotnej i mnożenia macierzy w postaci blokowej), że wówczas

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

(b) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz A (i B) podzielić na cztery bloki stopnia 2. Zastosować powyższe wzory do obliczenia A^2, AB i A^{-1}.

Uwaga. Postać blokowa macierzy nie jest w programie wykładu.

Zadanie 2.14

(*Eliminacja Gaussa-Jordana*) W trakcie eliminacji Gaussa, zastosowanej do układu równań liniowych z nieosobliwą macierzą, układ jest przekształcany do układu równoważnego z macierzą trójkątną górną (z ewentualnym przestawianiem równań, czyli wierszy macierzy układu i prawej strony). Proces ten można kontynuować przekształcając układ do układu z macierzą przekątniową (za pomocą elementarnych przekształceń "zerując" elementy macierzy układu powyżej głównej przekątnej), który bardzo łatwo można rozwiązać. Metoda ta nazywa się *eliminacją Gaussa-Jordana*. Rozwiązać za pomocą eliminacji Gaussa-Jordana, któryś z układów równań liniowych podany w poprzednich zadaniach.

Lista trzecia - Dowolne układy równań liniowych, twierdzenie Kroneckera-Capellego i wzory Cramera.

Wyznaczanie rzędu macierzy, badanie istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu równań liniowych za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego, rozwiązywanie dowolnych układów rónań liniowych, wzory Cramera dla układów z macierzą nieosobliwą.

Pytania

1. Jakie elementarne przekształcenia nie zmieniają rzędu macierzy? Czy przestawienie dwóch wierszy w macierzy zmieni jej rząd? Podać definicję rzędu macierzy.
2. Czy prawdziwe jest następujące zdanie: Rząd kwadratowej macierz przekątniowej jest równy liczbie niezerowych elementów na jej głównej przekątnej?
3. Jak brzmi twierdzenie Kroneckera-Capellego?
4. Kiedy układ n równań liniowych jednorodnych z n niewiadomymi ma niezerowe rozwiązanie?
5. Jaki rząd ma macierz nieosobliwa stopnia n? Czy rozwiązanie układu równań liniowych z macierzą nieosobliwą jest jednoznaczne?
6. Kiedy układ równań liniowych niejednorodnych ma jednoznaczne rozwiązanie?
7. Czy każdy układ m równań liniowych z n niewiadomymi ma rozwiązanie, jeśli macierz układu ma rząd m? A jaki wniosek otrzymuje się dla układu, którego macierz ma rząd n?
8. Kiedy można stosować wzory Cramera do rozwiązania układu równań liniowych?
9. Niech A będzie macierzą stopnia n. Czy są równoważne następujące stwierdzenia:
   (a) istnieje A^{-1},
   (b) A jest nieosobliwa,
   (c) A ma rząd n,
   (d) układ równań liniowych jednorodnych $AX = 0$ ma tylko zerowe rozwiązanie.

Lista trzecia - Zadania podstawowe

Zadanie 3.1

(a) Podać przykłady macierzy prostokątnych, które mają rząd równy 2.

(b) ([1], str. 211) Wyznaczyć rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy elementarne przekształcenia (jakie?) mogą ułatwić wyznaczenie rzędu macierzy?

(c) ([15], str. 23, [19], str. 102) Wyznaczyć rząd następujących macierzy w zależności od wartości parametru λ

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda+2 & 2\lambda \\ \lambda-2 & 2\lambda-5 & 2\lambda-4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3.2

(a) Napisać przykład jednorodnego układu trzech równań liniowych z czteroma niewiadomymi z macierzą układu rzędu 2. Czy ten układ ma niezerowe rozwiązanie?

(b) ([1], str. 24) Dla jakich wartości λ jednorodny układ równań liniowych

$$(\lambda-3)x+y=0, \quad x+(\lambda-3)y=0$$

ma niezerowe rozwiązanie?

(c) ([1], str. 23) Bez wykonywania obliczeń spróbować wyjaśnić, czy następujące układy równań liniowych jednorodnych mają niezerowe rozwiązanie:

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=0 \\ 6x_1-4x_2=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_2-8x_3=0 \\ 4x_3=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-x_4=0 \\ 7x_1+x_2-8x_3+9x_4=0 \\ 2x_1+8x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}.$$

Zadanie 3.3

(a) ([1], str. 19) Dla jakich wartości parametru p poniższy układ równań liniowych niejednorodnych nie ma rozwiązania? Kiedy ma dokładnie jedno rozwiązanie? Kiedy ma nieskończenie wiele rozwiązań?

$$x+2y-3z=4, \quad 3x-y+5z=2, \quad 4x+y+(p^2-14)z=p+2.$$

(b) ([19], str. 99-100) Zbadać, czy poniższe układy równań liniowych mają rozwiązanie i czy jest ono jednoznaczne w zależności od wartości parametrów a, b:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=b \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ ax-14y+15z=0 \\ x-2y-3z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} (a+1)x+y=a+2 \\ (a+3)x+2y=3a+1 \\ 3x+y=5 \end{cases}.$$

(c) Dlaczego następujący układ równań liniowych

$$x+y+pz=2, \quad 2x+z=2, \quad x+y+z=2$$

ma rozwiązanie dla każdego parametru p? Dla jakich wartości parametru p to rozwiązanie jest jednoznaczne?

(d) ([1], str. 64) Jak powinny być wybrane wartości parametrów a, b i c, żeby układ równań liniowych

$$ax+by-3z=-3, \quad -2x-by+cz=-1, \quad ax+3y-cz=-3$$

miał rozwiązanie $x=1, y=-1, z=2$?

Zadanie 3.4

([15], str. 25, [19], str. 100, 101) Zbadać za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego, czy niżej podane układy równań liniowych o macierzy prostokątnej mają rozwiązania. Jeśli tak, to wyznaczyć rozwiązania, rozwiązując na przykład za pomocą eliminacji Gaussa odpowiedni podukład.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ 4x + y + 3z = 3 \\ x + y - 5z = 8 \\ 6x + 3y - z = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \\ 5x - y + 3z - 3 = 0 \\ 7x - 2y + 4z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Które niewiadome będą parametrami w tym podukładzie, a które niewiadome będą od nich zależeć?

Zadanie 3.5

(a) ([12], str. 108) Dla jakich wartości parametru p poniższe układy równań liniowych mogą być rozwiązane za pomocą wzorów Cramera:

$$\begin{cases} (p+1)x - py = 1 \\ 2x + (p-1) = 3p \end{cases}, \quad \begin{cases} px + 3y + pz = 0 \\ -px + 2z = 3 \\ x + 2y + pz = p \end{cases} ?$$

(b) Zastosować wzory Cramera do rozwiązania następujących układów równań liniowych, jeśli to możliwe: ([12], str.108, [1], str. 96)

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 5 \end{cases}.$$

(c) ([12], str.) Stosując wzór Cramera, wyznaczyć tylko niewiadomą y dla następującego układu równań liniowych

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 3t = 4 \\ 3x + y + 3z + 3t = 4 \\ 3x + 3y + z + 3t = 6 \\ 3x + 3y + 3z + t = 6 \end{cases}.$$

Lista trzecia - Zadania uzupełniające

Zadanie 3.6

Niech $A \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ będzie macierzą jednokolumnową, a $B \in \mathbb{R}^{1\times n}$ macierzą jednowierszową. Jaki wymiar ma macierz $C = AB$? Czy można obliczyć iloczyn $D = BA$ jeśli $m \neq n$? Niech $m = n$. Dlaczego wówczas wyznacznik macierzy $C = AB$ jest równy zero? Jaki rząd ma macierz C? *Wskazówka.* Napisać wzory na elementy macierzy C na przykład dla $m = n = 3$ i zastanowić się, jaką własność mają kolumny macierzy C.

Zadanie 3.7

Korzystając z warunków na rozwiązalność dowolnego układu równań liniowych podać warunki na to, by na płaszczyźnie:

(i) trzy punkty leżały na wspólnej prostej (były współliniowe),

(ii) trzy proste przechodziły przez wspólny punkt.

Zadanie 3.8

([1], str. 24) Rozważyć układ trzech równań jednorodnych

$$ax + by = 0, \quad cx + dy = 0, \quad ex + fy = 0.$$

Zbadać wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, opisanych przez poszczególne równania. Rozpatrzyć dwa przypadki: układ ma tylko trywialne rozwiązanie (zerowe) i układ ma nietrywialne rozwiązanie (niezerowe).

Zadanie 3.9

([12], str. 118) Znaleźć macierz A spełniajacą jednocześnie oba podane warunki

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz A jest określona jednoznacznie?

Zadanie 3.10

(a) ([1], str. 20) Znaleźć współczynniki wielomianu $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, który dla $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4$ przyjmuje odpowiednio wartości

$$w(0) = 10,\ w(1) = 7,\ w(3) = -11,\ w(4) = -14.$$

Wskazówka. Należy rozwiązać układ równań liniowych wynikający z podanych warunków na wartości wielomianu dla ustalonych argumentów. Niewiadomymi tego układu są współczynniki szukanego wielomianu. Zwrócić uwagę na postać macierzy układu i porównać ją z wyznacznikiem Vandermonde'a, zdefiniowanym w jednym z zadań uzupełniających z listy 3. Czy powyższe warunki jednoznacznie określają ten wielomian? Co by było, gdyby argumenty $x_1, \ldots, x_4$ nie były różne? *Uwaga.* Zadanie jest przykładem *interpolacji wielomianowej Lagrange'a.*

(b) ([17], str. 71) Niech $x_1 = 1, x_2 = 2$. Znaleźć wielomian $w(x)$ stopnia $\leqslant 5$ spełniający warunki (w tych warunkach występują pochodne)

$$w(x_1) = -2,\ w'(x_1) = -7,\ w''(x_1) = -14,\ w'''(x_1) = 24,$$

$$w(x_2) = -4,\ w'(x_2) = 25.$$

Uwaga. Zadanie jest przykładem *interpolacji wielomianowej Hermite'a.*

(c) ([8], str. 95) Niech $w(x)$ będzie wielomianem stopnia $\leqslant 5$ spełniającym warunki

$$w(0) = w(1) = w(2) = w(3) = 0.$$

Napisać układ równań liniowych, którego rozwiązaniem są współczynniki wielomianu $w(x)$, spełniającego te warunki. Zbadać, czy te warunki jednoznacznie określają ten wielomian. Podać ogólną postać wielomianów $w(x)$, spełniających te warunki.

Zadanie 3.11

([8], str. 155) Niech liczba λ będzie wartością własną macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, czyli pierwiastkiem jej wielomianu charakterystycznego $w(x) = \det\,(A - xI)$ (zob. zadanie uzupełniające 3.13). Wobec tego macierz układu równań liniowych jednorodnych $(A - \lambda I)X = 0, X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, jest osobliwa i układ ten ma niezerowe rozwiązania. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, że $\lambda = 1$ jest wartością własną macierzy A i wyznaczyć rząd macierzy $A - \lambda I$ oraz rozwiązania układu $(A - \lambda I)X = 0$. To samo wykonać dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

i $\lambda = 3$. *Przypomienie.* Symbol I oznacza macierz jednostkową.

Zadanie 3.12

Niech dany będzie układ równań liniowych $AX = B$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą nieosobliwą, $X, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ są macierzami jednokolumnowymi, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$. Wiadomo, że rozwiązaniem tego układu równań liniowych niejednorodnych jest $X = A^{-1}B$. Wykazać, że ten wzór jest równoważny wzorom Cramera $x_k = \frac{\det\,A_k}{\det\,A}$, $k = 1, \ldots, n$. *Wskazówka.* Rozwinąć wyznacznik $\det\,A_k$ względem k-tej kolumny. Czy to wyrażenie podzielone przez $\det\,A$ jest równe k-temu elementowi macierzy $A^{-1}B$? Skorzystać z macierzy dołączonej.

Lista czwarta - Podstawowe własności liczb zespolonych

Postać algebraiczna liczby zespolonej, część rzeczywista i część urojona, działania na liczbach zespolonych, liczba sprzężona, moduł i argument liczby zespolonej, postać trygonometryczna liczby zespolonej, zastosowanie liczb zespolonym do opisu zbiorów punktów na płaszczyźnie, wzór de Moivre'a.

Pytania

1. Co to jest iloczyn kartezjański dwóch zbiorów?
2. Kiedy dwie liczby zespolone są równe?
3. Czy dodawanie i mnożenie liczb zespolonych mają analogiczne własności jak dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych (przemienność, łączność, rozdzielność)?
4. Jaką interpretację geometryczną ma dodawanie liczb zespolonych?
5. Jaką liczbę nazywamy liczbą sprzężoną do danej liczby zespolonej? Jak położone są na płaszczyźnie punkty odpowiadające liczbie z i liczbie sprzężonej $\bar{z}$?

6. Jaka jest geometryczna interpretacja modułu i argumentu głównego liczby zespolonej? Gdzie leżą na płaszczyźnie punkty odpowiadające liczbom zespolonym o tym samym argumencie głównym, a gdzie leżą punkty odpowiadające liczbom zespolonym o tym samym module?
7. Jaka jest interpretacja geometryczna modułu różnicy dwóch liczb zespolonych z_1 i z_2? Gdzie leżą na płaszczyźnie punkty odpowiadające liczbom zespolonym z takim, że $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z_1 \neq z_2$?
8. Jak udowodnić (korzystając z postaci algebraicznej ilorazu dwóch liczb zespolonych), że moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych jest ilorazem ich modułów?
9. Jaki jest związek między argumentami i modułami liczb zespolonych z oraz $-z$?
10. Jak za pomocą wzoru de Moivre'a można obliczać potęgi liczby zespolonej danej w postaci trygonometrycznej?

Lista czwarta - zadania podstawowe

Zadanie 4.1

(a) Wykonać podane działania na liczbach zespolonych:

$$\left(\frac{1}{3} + 0.2i\right)\left(0.5 - \frac{1}{2}i\right), \quad \frac{2+3i}{1+i}, \quad \frac{5-i}{i},$$

(b) Obliczyć, stosując wzory skróconego mnożenia

$$(2-5i)(2+5i), \quad (125-4i)^2 - (125+4i)^2, \quad (2+i)^3.$$

(c) Dla danych liczb zespolonych $z_1 = 2 - 5i$ oraz $z_2 = -1 - i$ obliczyć

$$z_1 - z_2 z_1, \quad (z_1 - z_2)z_1, \quad (z_1 + 3z_2)^2, \quad iz_2 - z_1^2, \quad i(z_2 - z_1)^2.$$

Zadanie 4.2

(a) Zapisać w postaci algebraicznej następujące liczby zespolone

$$i(1+7i) - 3i(4+2i), \quad (1-3i)^3, \quad (1+i+i^2+i^3)^{100}.$$

(b) Dla dowolnej liczby całkowitej k obliczyć $(-i)^k$. Zapisać wartość w zależności od k. Posłużyć się wzorem "klamerkowym".

(c) Niech z będzie liczbą zespoloną. Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną następujących liczb zespolonych:

$$z - 2 + i, \quad z - (2+i), \quad iz + 2, \quad z^2, \quad \bar{z}(2+i), \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1-z}{1-i}.$$

(d) Udowodnić, że dla dowolnej liczby zespolonej z mamy $\mathrm{Im}\,(iz) = \mathrm{Re}\,(z)$ oraz $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \mathrm{Re}\, z$.

(e) Zobrazować na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadających liczbom zespolonym z spełniającym warunki $-1 < \mathrm{Re}\, iz < 0$.

(f) Wyznaczyć część rzeczywistą oraz urojoną ilorazu dwóch liczb zespolonych z_1/z_2, $z_2 \neq 0$.

Zadanie 4.3

(a) Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równanie
(i) $(2+3i)x + (5-2i)y = -8+7i$, (ii) $(2+yi)+(x-3i) = 7-i$.

(b) Wyznaczyć liczbę zespoloną z spełniającą równanie
(i) $(1+i)z + 3(z-i) = 0$, (ii) $2z + 5i = 6 - \bar{z}$.

(c) Rozwiązać następujący układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi zespolonymi z_1 oraz z_2:

$$(2+i)z_1 - iz_2 = i, \qquad 2z_1 + z_2 = 3+i.$$

Zadanie 4.4

Zaznaczyć na płaszczyźnie położenie punktów odpowiadających danym liczbom zespolonym. Dla każdej z nich wyznaczyć moduł i argument główny oraz zapisać ją w postaci trygonometrycznej

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ \sqrt{3}-i,\ -\sqrt{2}+i\sqrt{6},\ \pi i,\ \left(\sqrt{7}-i\sqrt{7}\right)^2,\ \frac{3}{i},\ \frac{4}{1+i},\ \frac{1}{1+3i}+\frac{1}{1-3i}.$$

Zadanie 4.5

(a) Zaznaczyć na płaszczyźnie punkt odpowiadający liczbie zespolonej $2+3i$ oraz punkty odpowiadające liczbom zespolonym z spełniającym warunek $|z| = |2+3i|$.

(b) Wykorzystując geometryczną interpretację modułu różnicy dwóch liczb zespolonych $|z-z_0|$, zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadających liczbom zespolonym z spełniającym warunek:
(i) $|z| \leqslant 3$, (ii) $|z-2+3i| = 1$,
(iii) $2 \leqslant |2z+4i| < 6$, (iv) $|z-2i| \geqslant 3$ i $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{6}$.

(c) Zastosować postać algebraiczną i definicję modułu liczby zespolonej oraz równanie okręgu do rozwiązania jednego z przykładów z poprzedniego podpunktu. *Przypomnienie.* Równanie okręgu o promieniu r i środku w punkcie o współrzędnych (a,b) ma następującą postać: $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$.

Zadanie 4.6

Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadających liczbom zespolonym z spełniającym warunek
(i) $2\pi/3 < \arg z \leqslant 5\pi/4$, (ii) $0 \leqslant \arg(-z) < 5\pi/3$.

Zadanie 4.7

(a) Niech $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Zaznaczyć na płaszczyźnie punkty odpowiadające liczbom $z, -z, iz, \bar{z}$. Zapisać każdą z nich w postaci trygonometrycznej. Jakie są związki między modułem i argumentem głównym liczby z a modułami i argumentami głównymi pozostałych liczb?

(b) Niech $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Zaznaczyć na płaszczyźnie punkty odpowiadające liczbom zespolonym $\bar{z}$, $-z$, $i\bar{z}$, $3z$, $-z/i$ oraz zapisać je w postaci trygonometrycznej. Wykorzystać wzory redukcyjne dla sinusa i cosinusa.

(c) Łatwo zauważyć, że pomnożenie liczby zespolonej z przez liczbę i może być zinterpretowane jako obrót punktu, odpowiadającego liczbie z, na płaszczyźnie o 90 stopni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Jaka jest interpretacja geometryczna dzielenia liczby zespolonej z przez i?

Zadanie 4.8

(a) Niech $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Wyprowadzić wzór na postać trygonometryczną liczby z^2 i porównać go z wzorem de Moivre'a.

(b) Wyznaczyć postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = i - \sqrt{3}$$

i zastosować wzór de Moivre'a do obliczenia następujących ich potęg

$$z_1^{12}, \quad z_2^{-6}, \quad \frac{z_1^{30}}{z_2^{30}}, \quad \frac{z_1^{25}}{z_2^{5}}, \quad \frac{z_2^{13}}{i^{77}}.$$

Wyniki zapisać w postaci algebraicznej.

(c) Niech $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$.

(i) Skorzystać z odpowiednich tożsamości trygonometrycznych (zob. lista zerowa) do uzasadnienia następującego wzoru na mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\Big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\Big).$$

(ii) Niech $z_2 \neq 0$. Jaką postać trygonometryczną ma iloraz z_1/z_2? Jak uzasadnić ten wzór, korzystając z wzoru na postać trygonometryczną iloczynu dwóch liczb zespolonych?

(iii) Niech

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = i - \sqrt{3}, \quad z_3 = z_2/z_1.$$

Obliczyć z_3^{30}.

Lista czwarta - zadania uzupełniające

Zadanie 4.9

Udowodnić, że jeśli iloczyn dwóch liczb zespolonych z_1 i z_2 jest równy 0, to co najmniej jedna z liczb z_1 i z_2 musi być zerem. Korzystając z tej własności udowodnić, że jeśli $zz_1 = zz_2$ oraz $z \neq 0$, to $z_1 = z_2$.

Zadanie 4.10

Udowodnić następujące własności liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$

$$|\bar{z}| = |-z| = |z|, \quad |az| = |a|\,|z|, \quad |\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.11

(a) ([6], str. 11) Udowodnić, że:

(i) Jeśli liczba zespolona z ma część urojoną różną od zera oraz $z+1/z$ jest liczbą rzeczywista, to $|z| = 1$.

(ii) Jeśli $z + 1/z = 2\cos\alpha$, to $z^n + 1/z^n = 2\cos(n\alpha)$. *Wskazówka.* Skorzystać ze związku między postaciami trygonometrycznymi liczb z oraz $1/z$.

(b) Wyrazić $\cos(5\alpha)$ za pomocą $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$. Skorzystać ze wzoru de Moivre'a. Otrzymany wzór uogólnić dla $\cos(n\alpha)$. *Wskazówka.* Porównać wyrażenie z^5 wynikające z wzoru de Moivre'a z bezpośrednio obliczonym wyrażeniem $\Big(|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\Big)^5$.

(c) Wyrazić za pomocą funkcji arctg argumenty liczb zespolonych

$$1+2i, \quad 1-2i, \quad -1-2i, \quad -1+2i.$$

Wskazówka. Zbiorem wartości funkcji $y = \operatorname{arctg} x$ jest przedział $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Na przykład argumentem liczby $-1+2i$ jest $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(1/2)$.

Zadanie 4.12

Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadających liczbom zespolonym z spełniającym warunki

(i) ([15], str. 78) $|z-1+i| = |z-i|$,

(ii) $|z-z_1| \leqslant |z-z_2|$,

(iii) $\frac{|z-2i|}{|z+4|} \geqslant 1$ (dla jakich liczb zespolonych to wyrażenie jest określone?).

Zadanie 4.13

(a) ([9], str. 50) Niech dwa wierzchołki trójkąta równobocznego odpowiadają liczbom zespolonym $z_1 = 1$ oraz $z_2 = 2+i$. Wyznaczyć współrzędne trzeciego wierzchołka trójkąta.

(b) ([9], str. 50) Dane są kolejne wierzchołki równoległoboku odpowiadające liczbom zespolonym z_1, z_2 i z_3. Wyznaczyć czwarty wierzchołek.

(c) ([9], str. 82) Niech punkty $P(x,y)$ odpowiadają liczbom zespolnym $z = x+iy$ spełniającym równanie $(1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2 = 0$. Na jakiej prostej leżą te punkty? Niech punkt $Q(a,b)$ odpowiada liczbie zespolonej $a+bi = 1/z$ dla z spełniającego powyższe równanie. Czy punkty Q leżą na okręgu? Jeśli tak, to na jakim?

Zadanie 4.14

([9], rozdz. II, [17], str. 36 i 37) W zbiorze liczb zespolonych są określone następujące funkcje zmiennej zespolonej:

$$f_0(z) = z, \quad f_1(z) = -z, \quad f_2(z) = iz, \quad f_3(z) = -iz, \quad f_4(z) = \bar{z},$$

$$f_5(z) = -\bar{z}, \quad f_6(z) = i\bar{z}, \quad f_7(z) = -i\bar{z}, \quad f_8(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}).$$

Podać ich interpretacje geometryczne. Z jakimi przekształceniami płaszczyzny są związane te funkcje? *Wskazówka.* Na przykład $f_1(z)$ - symetria środkowa względem początku układu (obrót o kąt π); $f_4(z)$ - symetria względem osi rzeczywistej układu współrzędnych.

Lista piąta - Obliczanie pierwiastków n-tego stopnia liczby zespolonej i rozkład funkcji wymiernej na sumę rzeczywistych ułamków prostych

Obliczanie pierwiastków n-tego stopnia liczby zespolonej, postać wykładnicza liczby zespolonej, działania na wielomianach, pierwiastki wielomianu, krotność pierwiastka, twierdzenie Bézouta, zasadnicze twierdzenie algebry, rozkład wielomianu rzeczywistego na czynniki rzeczywiste nierozkładalne, funkcja wymierna, rzeczywiste ułamki proste, rozkład funkcji wymiernej na sumę rzeczywistych ułamków prostych.

Pytania

1. Jak definiuje się pierwiastek n-tego stopnia liczby zespolonej z? Ile różnych pierwiastków n-tego stopnia ma niezerowa liczba zespolona?
2. Jak za pomocą wzoru de Moivre'a wyprowadza się wzór na pierwiastki n-tego stopnia liczby zespolonej?
3. Niech ε_k i ε_l będą pierwiastkami n-tego stopnia z jedynki. Czy ich iloczyn jest też pierwiastkiem n-tego stopnia z jedynki? Jaka jest interpretacja geometryczna pierwiastków z jedynki?
4. Niech dana będzie postać wykładnicza niezerowej liczby zespolonej z. Jaką postać wykładniczą ma liczba $1/z$?
5. Czy każdy wielomian rzeczywisty ma pierwiastek rzeczywisty? Sformułować zasadnicze twierdzenie algebry.
6. Dokończyć zdanie: Trójmian kwadratowy o współczynnikach rzeczywistych nie da się przedstawić w postaci iloczynu dwóch jednomianów rzeczywistych (czyli jest nierozkładalny w zbiorze liczb rzeczywistych) wtedy i tylko wtedy, gdy .... A czy wtedy jest rozkładalny w zbiorze liczb zespolonych?
7. Niech x_1 będzie podwójnym pierwiastkiem wielomianu $w(x)$. Dla jakiej wartości parametru $k \in \mathbb{N}$ wielomian $w(x)$ dzieli się przez $(x - x_1)^k$? Skorzystać z twierdzenia Bézouta.
8. Niech zero będzie pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Co można wywnioskować o współczynniku a_0?
9. Jak można wyznaczyć krotność danego pierwiastka wielomianu?
10. Z jakich własności liczb zespolonych wynika, że jeśli wielomian o współczynnikach rzeczywistych ma pierwiastek zespolony $z_1 = a + bi$, to $\bar{z}_1$ też musi być pierwiastkiem tego wielomianu? Jaki stąd otrzymuje się wniosek dotyczący rzeczywistych pierwiastków wielomianów rzeczywistych stopnia nieparzystego?
11. Na sumę jakich rzeczywistych ułamków prostych rozkłada się funkcja wymierna, której licznik jest wielomianem stopnia zero, a mianownik nierozkładalnym trójmianem kwadratowym?

Lista piąta - zadania podstawowe

Zadanie 5.1

(a) Wyznaczyć pierwiastki kwadratowe liczb zepolonych $1+i, -1+\sqrt{3}i$. Obliczenia wykonać dwoma sposobami

(i) z definicji pierwiastka, wykorzystując postać algebraiczną liczby zespolonej,

(ii) ze wzoru na pierwiastki, wykorzystując postać trygonometryczną liczby zespolonej.

(b) ([15], str. 73) Niech $\sqrt[n]{z}$ oznacza zbiór wszystkich pierwiastków n-tego stopnia liczby zespolonej z. Zapisać w postaci trygonometrycznej i zaznaczyć na płaszczyźnie elementy następujących zbiorów

$$\sqrt[6]{i}, \quad \sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}, \quad \sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}.$$

(c) ([15], str. 73) Zapisać w postaci algebraicznej i zaznaczyć na płaszczyźnie elementy następujących zbiorów: pierwiastki trzeciego stopnia liczb 1, -1, i, $-i$ oraz $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[3]{1+i}$.

(d) Wykorzystać umiejętność obliczania pierwiastków liczby zespolonej do rozwiązania równań

$$z^4+8=0, \quad z^2+i=0, \quad z^4+1-i=0.$$

(e) W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania

$$z^2+4z+5=0, \quad z^2-(3-2i)z+5-5i=0, \quad z^4+2z^2-3=0.$$

Czy wśród otrzymanych rozwiązań muszą być pary liczb zespolonych sprzężonych? Dlaczego?

Zadanie 5.2

(a) Podzielić wielomian $p(x)$ przez wielomian $q(x)$. Przed wykonaniem dzielenia sprawdzić (korzystając z twierdzenia Bézouta), czy reszta z dzielenia jest równa zero. Obliczenia wykonać dla wielomianów

$$p(x) = x^4-3x^3+3x^2-3x+2, \quad q(x) = x^2+1.$$

(b) Bez wykonywania dzielenia odpowiedzieć na pytanie, przez który z dwumianów $x+1, x-i$ oraz $x+i$ dzieli się wielomian x^3+1.

Zadanie 5.3

(a) Korzystając z własności sprzężenia liczb zespolonych, udowodnić, że jeśli wielomian o współczynnikach rzeczywistych ma pierwiastek zespolony ξ, to liczba sprzężona $\bar{\xi}$ jest też jego pierwiastkiem. Dlaczego stąd i z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że wielomian stopnia trzeciego o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty?

(b) Niech $w(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$. Czy i dlaczego $|a_0|$ jest iloczynem modułów wszystkich pierwiastków wielomianu, wymieniając je tyle razy ile wynosi ich krotność? *Wskazówka.* Skorzystać z rozkładu dowolnego wielomianu na iloczyn dwumianów zespolonych.

(c) Skonstruować możliwie najniższego stopnia wielomian rzeczywisty, o współczynniku jeden przy najwyższej potędze, mający:

(i) podwójny pierwiastek 2 oraz pojedyńcze pierwiastki 1 oraz $-1+i$,
(ii) podwójny pierwiastek i oraz pojedyńczy pierwiastek $1-i$.

Zadanie 5.4

(a)([12], str. 49) Znając niektóre z pierwiastków danego wielomianu rzeczywistego, znaleźć jego pozostałe pierwiastki:

(i) $x_1 = -3, \quad w(x) = x^3 + 7x^2 + 20x + 24,$

(ii) $x_1 = \sqrt{2} + i, \quad w(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2},$

(iii) $x_1 = i,\ x_2 = -\sqrt{2}i, \quad w(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 4.$

(b) Korzystając z wzorów skróconego mnożenia, rozłożyć dane wielomiany $w(x)$ na czynniki liniowe i podać pierwiastki tych wielomianów:

$$z^2+9, \quad z^4-16, \quad z^3+8, \quad z^4+z^2+1.$$

Wskazówka. $9 = -(3i)^2,\ z^4+z^2+1 = z^4+2z^2+1-z^2.$

(c) Dane wielomiany o współczynnikach rzeczywistych przedstawić w postaci iloczynu rzeczywistych czynników nierozkładalnych:

$$x^4+16, \quad 8x^3-1, \quad 4x^4+12x^2+9, \quad x^3+x-2.$$

(d) ([4], str. 91) Wielomian $w(x) = x^3 + px + q$ ma pierwiastki x_1, x_2, x_3, przy czym $x_1 = x_2, x_3 = x_1 - 6$. Obliczyć współczynniki p, q.

(e) ([4], str. 92) Reszta z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x-2$ jest równa 5, a reszta z dzielenia tego samego wielomianu przez dwumian $x-3$ jest równa 7. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez $(x-2)(x-3)$.

Zadanie 5.5

(a) Napisać, na sumę jakich rzeczywistych ułamków prostych można rozłożyć funkcję wymierną (nie wyznaczać współczynników tego przedstawienia)

$$\frac{5x}{x^2-7x+6}, \quad \frac{7x^2}{x^3+2x-3}, \quad \frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^2(x^2-1)^2(x^2+1)^3}.$$

(b) Wyrazić funkcję wymierną w postaci sumy rzeczywistych ułamków prostych:

$$\frac{1}{x(x-1)^2}, \quad \frac{3x-1}{x^3+x^2}, \quad \frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+1)^2}, \quad \frac{1}{x^4+4}.$$

(c) ([14], str. 74) Wyrazić funkcję wymierną w postaci sumy wielomianu i rzeczywistych ułamków prostych:

$$\frac{x^{12}}{x^6-1}, \quad \frac{x^2+2x-3}{x^2+x+1}.$$

(d) Czy istnieją takie liczby A i B, że

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}?$$

Lista piąta - zadania uzupełniające

Zadanie 5.6

([1], str. 501) Wyznaczyć postać trygonometryczną liczb zespolonych z_1 oraz z_2 danych w następującej postaci wykładniczej $z_1 = 3e^{i\pi}$, $z_2 = 3e^{-i\pi}$ oraz podać postać wykładniczą liczb $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$.

Zadanie 5.7 ([15], str. 73)

Wykazać, że jeśli liczba zespolona z jest jednym z pierwiastków stopnia n liczby rzeczywistej a, to także liczba sprzężona $\bar{z}$ jest jednym z pierwiastków n-tego stopnia liczby a.

Zadanie 5.8

(a) Niech $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ będą pierwiastkami n-tego stopnia z jedynki, czyli

$$\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}\},$$

gdzie

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n} i.$$

Wykazać, że $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ dla $k = 0, \ldots, n-1$. *Uwaga.* Pierwiastek ε_1 nazywamy *pierwiastkiem pierwotnym* z jedynki .

(b) ([15], str. 73) Niech z i w będą liczbami zespolonymi i niech

$$\sqrt[n]{z} = \{z_1, \ldots, z_n\}.$$

Wykazać, że

$$\sqrt[n]{\bar{z}} = \{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n\}, \quad \sqrt[n]{z^n w} = z\sqrt[n]{w}, \quad \sqrt[n]{zw} = u\sqrt[n]{w},$$

gdzie u jest jednym z elementów zbioru $\sqrt[n]{z}$. *Uwaga.* $u\sqrt[n]{w}$ oznacza zbiór wszystkich pierwiastków n-tego stopnia liczby w pomnożonych przez u.

(c) ([12], str. 41) Odgadując jeden z pierwiastków trzeciego stopnia liczby $z = (2-i)^6$ obliczyć jej pozostałe pierwiastki stopnia 3.

(d) ([15], str. 74, [6], str. 18) Rozwiązać równania

$$\text{(i)}\ \ (z+1)^n - (z-1)^n = 0, \qquad \text{(ii)}\ \ (z+i)^n - (z-i)^n = 0.$$

Wskazówka. Przekształcić pierwsze równanie do postaci $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

(e) ([6], str. 19) Udowodnić, że jeśli liczba zespolona w ma moduł równy 1, to wszystkie rozwiązania x równania

$$\Big(\frac{1+ix}{1-ix}\Big)^m = w$$

są rzeczywiste dla dowolnej liczby naturalnej $m > 1$. *Wskazówka.* Zapisać liczbę w w postaci trygonometrycznej $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$ i wyrazić $\frac{1+ix}{1-ix}$ za pomocą kwadratu pierwiastka w_k stopnia $2m$ liczby w $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$:

$$\frac{1+ix}{1-ix} = w_k^2, \qquad w_k = \cos\frac{\alpha+2k\pi}{2m} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{2m}.$$

A co będzie dla $m = 1$?

(f) ([12], str. 41) Jednym z wierzchołków kwadratu jest punkt odpowiadający liczbie zespolonej $z_1 = 4-i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki kwadratu, którego środkiem jest początek układu współrzędnych. *Wskazówka.* Zauważyć, że liczby iz_1, i^2z_1, i^3z_1 odpowiadają pozostałym wierzchołkom kwadratu.

(g) Niech liczby zespolone z_1, z_2, z_3 oraz z_4 będą pierwiastkami czwartego stopnia pewnej liczby zespolonej z. Zaznaczyć na płaszczyźnie odpowiadające im punkty i zauważyć, że są one wierzchołkami pewnego kwadratu. Jaki jest promień okręgu o środku w początku układu, w który jest wpisany ten kwadrat?

Zadanie 5.9

Wyprowadzić wzory Viéte'a dla wielomianu stopnia 3, czyli wyrazić współczynniki tego wielomianu za pomocą jego pierwiastków. Zastosować te wzory do obliczenia sumy i iloczynu wszystkich pierwiastków trzeciego stopnia z jedynki.

Zadanie 5.10

([15], str. 87) Wykazać, że jeśli liczba wymierna w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ o współczynnikach całkowitych, to p dzieli współczynnik a_n, q dzieli współczynnik a_0. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14, \quad 24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60.$$

Zadanie 5.11

Niech wielomian

$$w(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$$

o współczynnikach rzeczywistych ma stopień n i niech $a_0 \neq 0$. Podać związek między pierwiastkami wielomianu $w(x)$ oraz następujących wielomianów $u(x)$ i $v(x)$:

$$u(x) = x^n w\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad v(x) = w(-x).$$

Do czego jest potrzebne założenie, że $a_0 \neq 0$? *Wskazówka.* Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą pierwiastkami wielomianu $w(x)$. Każdy pierwiastek jest wymieniony tyle razy ile wynosi jego krotność. Wówczas wielomian $w(x)$ można zapisać tak:

$$w(x) = a_n\prod_{j=1}^{n}(x - x_j),$$

gdzie symbol $\prod_{j=1}^{n} a_j$ oznacza iloczyn n liczb $a_1 \cdots a_n$. Jak korzystając z tego zapisu można przedstawić wielomiany $u(x)$ i $v(x)$?

Zadanie 5.12

([15], str. 83) Niech rzeczywisty wielomian $w(x)$ stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$. Rozłożyć funkcję wymierną $1/w(x)$ na sumę ułamków prostych. Współczynniki występujące w tej sumie wyrazić za pomocą wartości pierwszej pochodnej wielomianu $w(x)$ dla $x = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Lista szósta - Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^3$ i płaszczyzny

Działania na wektorach w $\mathbb{R}^3$, długość wektora, iloczyn skalarny, zastosowanie iloczynu wektorowego oraz mieszanego do obliczania pola powierzchni i objętości brył, równanie ogólne płaszczyzny, wektor normalny, kąt między płaszczyznami, płaszczyzna przez trzy punkty.

Pytania

1. Co to jest prostokątny kartezjański układ współrzędnych? Jakie wektory nazywamy wersorami?
2. Co to znaczy, że orientacja trójki wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest zgodna z orientacją trójki wersorów (zgodna z orientacją układu współrzędnych)? Jak można zbadać, czy orientacja trójki wektorów jest zgodna?
3. Jak można oszacować z góry moduł iloczynu skalarnego dwóch wektorów za pomocą długości wektorów (nierówność Cauchy-Schwarza)?
4. Czemu równa się długość wektora będącego iloczynem wektorowym dwóch wektorów? Wymienić jedną z innych własności iloczynu wektorowego.
5. Za pomocą jakich iloczynów definiuje się iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów? Czy zmieni się wartość iloczynu mieszanego, jeśli przestawimy dwa pierwsze wektory?
6. Czy każde trzy punkty w przestrzeni jednoznacznie określają płaszczyznę, na której one leżą? Odpowiedź zilustrować przykładem.
7. Jak wyznaczyć wektor normalny płaszczyzny, jeśli znamy współrzędne trzech punktów leżących na tej płaszczyźnie? Czy to mogą być dowolne punkty leżące na tej płaszczyźnie?
8. Jak definiuje się kąt między wektorami w $\mathbb{R}^3$? Jak obliczyć kąt między dwoma płaszczyznami?

Lista szósta - zadania podstawowe

Zadanie 6.1

(a) ([13], str. 222) Zbadać, czy istnieją takie liczby α, β, γ, że wektor $\vec{\mathbf{d}} = [4, 12, -3]$ można przedstawić w postaci $\vec{\mathbf{d}} = \alpha\vec{\mathbf{a}} + \beta\vec{\mathbf{b}} + \gamma\vec{\mathbf{c}}$, gdzie $\vec{\mathbf{a}} = [3, 2, 1]$, $\vec{\mathbf{b}} = [5, 7, 0]$, $\vec{\mathbf{c}} = [3, -2, 4]$.

(b) ([19], str. 133) W rombie $ABCD$ dane są przekątne $AD = \vec{\mathbf{a}}$ i $BD = \vec{\mathbf{b}}$. Wyrazić za pomocą wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ wektory odpowiadające bokom rombu.

(c) ([12], str. 126) Obliczyć długość wektorów $\vec{\mathbf{a}} = [3, -4, 12]$, $\quad \vec{\mathbf{b}} = [r\cos\alpha, r\sin\alpha, r]$.

(d) ([13], str. 222) Wyznaczyć wektor $\vec{\mathbf{e}}$ o długości jeden oraz o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem wektora $\vec{\mathbf{a}} = [12, 3, -4]$.

Zadanie 6.2

(a) Obliczyć iloczyn skalarny $\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}}$ danych par wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ oraz cosinus kąta między wektorami $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$:

$$\vec{\mathbf{a}} = [1, 1, 5], \quad \vec{\mathbf{b}} = [2, -1, 3],$$

$$\vec{\mathbf{a}} = 4\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}},$$

gdzie $\vec{\mathbf{i}} = [1, 0, 0]$, $\vec{\mathbf{j}} = [0, 1, 0]$, $\vec{\mathbf{k}} = [0, 0, 1]$ są wersorami osi układu współrzędnych $Oxyz$.

(b) ([19], str. 135) Znaleźć wektor $\vec{\mathbf{a}}$ wiedząc, że jest jest on prostopadły do wektorów $\vec{\mathbf{b}} = [2, 3, -1]$ i $\vec{\mathbf{c}} = [1, -2, 3]$ oraz spełnia warunek $\vec{\mathbf{a}} \circ [2, -1, 1] = -6$.

(c) ([19], str. 135) Wektor $\vec{\mathbf{a}} = [3, -1, 2]$ przedstawić w postaci sumy dwóch wektorów, z których jeden jest równoległy, a drugi prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{b}} = [-1, 4, 5]$.

Zadanie 6.3

(a) Obliczyć iloczyn wektorowy danych par wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ oraz pole równoległoboku rozpiętego na tych wektorach:

$$\vec{\mathbf{a}} = [-2, 2, 0], \ \vec{\mathbf{b}} = [1, 5, -2]; \qquad \vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{k}}, \ \vec{\mathbf{b}} = 2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}.$$

(b) ([13], str. 223) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach

$$A(-1, 0, -1), \ B(0, 2, -3), \ C(4, 4, 1).$$

(c) ([19], str. 136) Sprawdzić następujące własności iloczynu wektorowego:

$$\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} = -\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{i}}.$$

(d) ([19], str. 136) Wykazać, że $(2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \times (\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}) = 3(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$.

Zadanie 6.4

(a) ([12], str. 140) Obliczyć iloczyn mieszany trójki wektorów

$$\vec{\mathbf{a}} = [-3, 2, 1], \quad \vec{\mathbf{b}} = [0, 1, -5], \quad \vec{\mathbf{c}} = [2, 3, -4]$$

oraz podać jego interpretację geometryczną.

(b) ([12], str. 14) Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach

$$A(1, 1, 1), \ B(1, 2, 3), \ C(2, 3, -1), \ D(-1, 3, 5).$$

Zadanie 6.5

(a) ([3], str. 133) Jak są położone w przestrzeni punkty $P(x, y, z)$, dla których
(i) $x = 0$, (ii) $x = y = 0$, (iii) $x = y$, (iv) $x = y = z$?
Odpowiedź zilustrować rysunkiem.

(b) ([3], str. 133) Dany jest punkt $P(3, -1, 2)$. Wyznaczyć współrzędne punktów symetrycznych do tego punktu względem płaszczyzn układu współrzędnych.

(c) ([13], str. 221) Znaleźć współrzędne punktu na osi Oy, który leży najbliżej punktu $(3, -4, 2)$.

(d) ([13], str. 221) Znaleźć współrzędne wszystkich punktów, których odległości od osi współrzędnych są następujące: $d_x = 2, d_y = \sqrt{2}, d_z = 2$. Ile jest punktów o tej własności?

(e) ([13], str. 222) Dane są wierzchołki czworokąta: $A(5, 2, 6)$, $B(6, 4, 4)$, $C(4, 3, 2)$ i $D(3, 1, 4)$. Sprawdzić, czy czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

Zadanie 6.6

(a) ([3], str. 142) Przez które z punktów

$$A(-1, 6, 3),\ B(2, 0, 5),\ C(2, 7, 0)$$

przechodzi płaszczyzna $4x - y + 3z + 1 = 0$?

(b) ([3], str. 145) Sprawdzić, czy dane cztery punkty leżą na wspólnej płaszczyźnie

(i) $(3, 1, 0)$, $(0, 7, 2)$, $(-1, 0, -5)$, $(4, 1, 5)$,
(ii) $(1, -1, 1)$, $(0, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$, $(4, 0, -3)$.

(c) ([3], str. 142) Napisać równania ogólne płaszczyzn: Oxy, Oyz, Oxz oraz płaszczyzny równoległej do płaszczyzny Oxz i przechodzącej przez punkt $P(2, -5, 3)$.

(d) ([3], str. 142) Wykazać osobliwości położenia następujących płaszczyzn względem osi współrzędnych (np. równoległość do osi lub płaszczyzny układu współrzędnych, przechodzenie przez początek układu współrzędnych)

$$3x - 5y + 1 = 0, \quad 9y - 2 = 0, \quad x + y - 5 = 0, \quad 2x + 3y - 7z = 0, \quad 8y - 3z = 0.$$

Narysować te płaszczyzny, które są równoległe od osi lub płaszczyzn układu współrzędnych.

(e) ([1], str. 144) Zbadać wzajemne położenie par płaszczyzn (równoległość, prostopadłość):

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ 7x - 3y + 4z = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 4y - 3z - 2 = 0 \\ 3x - 12y - 9z - 7 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x - y + z - 4 = 0 \\ x + 2z = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ -2x + 5y + 4z = -1 \end{cases}.$$

Zadanie 6.7

Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny spełniającej dane warunki:

(a) przechodzącej przez trzy punkty $P(-4, -1, -1)$, $Q(-2, 0, 1)$, $R(-1, -2, -3)$.

(b) przechodzącej przez punkt $P(-1, 3, -2)$ i mającej wektor normalny $\vec{\mathbf{n}} = [-2, 1, -1]$.

(c) przechodzącej przez punkt $P(1,2,3)$ i równoległej do wektorów $\vec{\mathbf{a}} = [1,-1,0]$, $\vec{\mathbf{b}} = [0,-1,1]$.

(d) ([13], str. 269) przechodzącej przez początek układu współrzędnych i przez punkt $P(1,2,3)$ oraz prostopadłej do płaszczyzny $x - y + 2z - 4 = 0$.

(e) ([13], str. 269) przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do płaszczyzn: $2x - y + 5z + 3 = 0$ i $x + 3y - z = 7 = 0$.

Zadanie 6.8

(a) ([12], str. 156) Wyznaczyć kąt między płaszczyznami $x - 2y + 3z - 5 = 0$ i $2x + y - z + 3 = 0$.

(b) ([3], str. 144) Przez punkt $P(-5,16,12)$ poprowadzono dwie płaszczyzny: jedna z nich zawiera oś Ox, a druga oś Oy. Obliczyć kąt między tymi płaszczyznami.

Lista szósta - zadania uzupełniające

Zadanie 6.9

(a) ([15], str. 72) Niech z_1 i z_2 będą liczbami zespolonymi. Udowodnić, że $|z_1 + z_2| = \Big||z_1| - |z_2|\Big|$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory odpowiadające liczbom zespolonym z_1 i z_2 mają jednakowy kierunek i przeciwny zwrot. Natomiast $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory reprezentujące liczby zespolone z_1 i z_2 mają jednakowy kierunek i zwrot.

(b) ([3], str. 197) Udowodnić, że iloczyn skalarny dwóch wektorów nie zmieni się, jeśli do jednego z nich dodamy wektor prostopadły do drugiego wektora.

(c) Wyrazić długość wektora $\vec{\mathbf{c}} = 3\vec{\mathbf{a}} - 4\vec{\mathbf{b}}$ za pomocą długości wektorów $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ wiedząc, że wektory $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$ są wzjemnie prostopadłe.

(d) ([1], str. 538) Korzystając z własności przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, udowodnić wzór cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha),$$

gdzie a, b, c są długościami boku trójkąta, α jest kątem leżącym na przeciwko boku a.

(e) ([1], str. 135) Zapisać prościej wyrażenie $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \times (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}})$.

Zadanie 6.10

(a) ([3], str. 198) Znając wektory $\vec{\mathbf{a}}$ i $\vec{\mathbf{b}}$, na których jest zbudowany równoległobok, wyrazić przez nie wektor przedstawiający wysokość równoległoboku prostopadłą do boku, który tworzy wektor $\vec{\mathbf{a}}$.

(b) ([3], str. 144) Obliczyć wysokość ostrosłupa o wierzchołkach

$$S(0,6,4), \quad A(3,5,3), \quad B(-2,11,-5a), \quad C(1,-1,4),$$

poprowadzoną z wierzchołka S.

(c) ([10], str. 45) Wyznaczyć wszystkie wartości parametru q, dla których trójkąt o wierzchołkach znajdujących się w punktach $O(0,0,0), A(-q,1,q), B(1,-q,q)$ ma pole równe $(q+1)/\sqrt{2}$.

Zadanie 6.11

(a) ([19], str. 136) Wykazać, że wektory $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ są równoległe do jednej płaszczyzny wtedy i tylko wtedy gdy ich iloczyn mieszany jest równy zeru: $\vec{\mathbf{a}} \circ (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = 0$.

(b) ([3], str. 143) Obliczyć pole trójkąta odciętego przez płaszczyzny układu współrzędnych i płaszczyznę $2x - 3y - z + 12 = 0$. Wykonać rysunek.

(c) ([14], str. 183) Dane są trzy punkty $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(0, 0, 2)$, $P_3(1, 1, 1)$. Znaleźć równania trzech płaszczyzn parami prostopadłych, przechodzących przez wspólny punkt P_1, z których jedna przechodzi przez trzy punkty P_1, P_2, P_3.

(d) ([14], str. 183) Wykazać, że jeśli płaszczyzna przechodzi przez trzy wierzchołki trójkąta: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$, to jej równanie można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Lista siódma</u> - Prosta w przestrzeni, krzywe drugiego stopnia na płaszczyźnie

Prosta jako przecięcie dwóch płaszczyzn, równanie parametryczne prostej w przestrzeni, wyznaczanie punktu przebicia płaszczyzny przez prostą, rzut prostopadły punktu na płaszczyznę, odległość punktu od płaszczyzny i prostej, wzajemne położenie prostych i płaszczyzn. Wyznaczanie równań elipsy, hiperboli i paraboli o zadanych własnościach (kierownica, ognisko, mimośród, asymptota).

<u>Pytania</u>

1. Ile punktów w przestrzeni jednoznacznie określa prostą, na której one leżą? Podać możliwie najmniejszą liczbę.
2. Jaki jest związek między wektorem kierunkowym prostej i wektorami normalnymi płaszczyzn, których jest ona przecięciem?
3. Jak wyznaczyć wektor kierunkowy prostej, jeśli dane jest jej równanie krawędziowe (czyli dane są równania ogólne dwóch płaszczyzn, których przecięciem jest ta prosta)?
4. Kiedy układ dwóch równań liniowych z trzema niewiadomymi określa prostą w $\mathbb{R}^3$?
5. Jak wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny przez prostą? Rozważyć dwa przypadki:
   - dane jest równanie parametryczne prostej,
   - dane jest równanie krawędziowe prostej.
6. Co to są proste skośne?
7. Jak wyznaczyć współrzędne punktu P' będącego rzutem prostopadłym punktu P na płaszczyznę π o danym równaniu ogólnym? Jak wykorzystać to do obliczenia odległości punktu P od płaszczyzny π?
8. Jak obliczyć odległość punktu od prostej bez korzystania z wzoru na tę odległość?

9. Jaką wspólną własność mają wszystkie punkty leżące na danej elipsie (hiperboli, paraboli)?
10. Co to jest ognisko elipsy (hiperboli, paraboli)? Ile ognisk ma parabola?
11. Czym równanie kanoniczne (osiowe) elipsy różni się od równania kanonicznego hiperboli?
12. Czy mimośród hiperboli wyraża się podobnym wzorem jak mimośród elipsy? Jak definiuje się mimośród?
13. Jaki punkt nazywamy punktem wewnętrznym hiperboli? Co to jest oś urojona hiperboli?
14. Czy każda prosta na płaszczyźnie ma punkt wspólny z hiperbolą? Jakie może być położenie prostej względem hiperboli?
15. Jaką prostą nazywamy kierownicą paraboli?

Lista siódma - zadania podstawowe

Zadanie 7.1

(a) ([3], str. 134) Znaleźć równanie parametryczne prostej, na której leżą punkty $A(-2,1,3)$ i $B(0,-1,2)$.

(b) ([1], str. 145) Znaleźć równanie parametryczne prostej będącej przecięciem dwóch danych płaszczyzn:

$$l_1 : \begin{cases} 7x - 2y + 3z = -2 \\ -3x + y + 2z + 5 = 0 \end{cases}, \qquad l_2 : \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

(c) ([1], str. 145)

(i) Pokazać, że prosta $l : x = 0, \ y = t, \ z = t \quad (t \in \mathbb{R})$ leży na płaszczyźnie $6x + 4y - 4z = 0$.

(ii) Sprawdzić, czy prosta l jest równoległa do płaszczyzn

$$5x - 3y + 3z = 1, \quad 6x + 2y - 2z = 3$$

Zadanie 7.2

(a) ([1], str 145) Znaleźć punkt przebicia płaszczyzny $2x-3y+4z+7 = 0$ przez prostą $l : x = 9 - 5t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R})$.

(b) ([11], str. 134) Zbadać, dla jakich wartości parametru m prosta

$$l_1 : x = 1 + 2t, y = -2, z = 3t \quad (t \in \mathbb{R})$$

przecina prostą

$$l_2 : \begin{cases} x - 2y + z + m = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}.$$

(c) ([3], str. 143)

(i) Wyznaczyć równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do płaszczyzny π: $15x-10y+6z-19 = 0$.

(ii) Wyznaczyć odległość początku układu współrzędnych od punktu przebicia płaszczyzny π przez prostą l.

Zadanie 7.3

(a) ([1], str. 147) Wyznaczyć rzut prostopadły P' punktu $P(3,1,-2)$ na płaszczyznę π: $x+2y-2z=4$ oraz obliczyć odległość punktu P od P', czyli odległość punktu P od płaszczyzny π.

(b) ([14], str. 188) Znaleźć odległość punktu $P(3,2,1)$ od prostej l:

$$l: \begin{cases} x=1 \\ y=t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}, \quad l: \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}.$$

Wskazówka. Przez punkt P poprowadzić płaszczyznę π prostopadłą do prostej l. Znaleźć rzut prostopadły P' punktu P na płaszczyznę π. Czemu równa się odległość punktu P od punktu P'?

Zadanie 7.4

([14], str. 187) Zbadać wzajemne położenie par prostych l_1 i l_2 $(t,s\in\mathbb{R})$:

(a)

$$l_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t, \\ z=1-3t \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x=2s \\ y=-2-s, \\ z=1 \end{cases}$$

(b)

$$l_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t, \\ z=1-3t \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x=3+s \\ y=-1-s, \\ z=1 \end{cases}$$

(c)

$$l_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1, \\ z=1-3t \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x=1-2s \\ y=1, \\ z=6s \end{cases}$$

(d)

$$l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t, \\ z=1-t \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x=1 \\ y=1-s, \\ z=1+s \end{cases}$$

Zadanie 7.5

Znaleźć równanie i zaznaczyć na płaszczyźnie miejsce geometryczne punktów spełniających warunek:

(i) odległość od punktu $(-1,2)$ wynosi 3,
(ii) suma odległości od punktów $(-1,2)$ i $(1,3)$ wynosi 3,
(iii) różnica odlegości od punktów $(-1,2)$ i $(1,3)$ wynosi 3,
(iv) odległość od punktu $(-1,2)$ i prostej $x+y+2=0$ jest taka sama.

Zadanie 7.6

(a) ([13], str. 62) Określić położenie punktów

$$A(3,-1),\ B(2,2),\ C(4,0),\ D(-5,-2),\ E(0,3),\ F(0,-4),\ G(\sqrt{7},3)$$

względem okręgu $x^2+y^2=16$.

(b) ([4], str. 78) Wyznaczyć współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A(2,3), B(-1,3), C(3,1)$.

Zadanie 7.7

(a) ([4], str. 79) Wyznaczyć współrzędne ognisk, mimośród i równania kierownic elipsy danej równaniem $4x^2+9y^2=36$. Wykonać rysunek.

(b) Znaleźć równanie elipsy w postaci kanonicznej mając dane

(i) półosie 3 i $\sqrt{2}$,
(ii) ogniska $F_1(0,-4)$ i $F_2(0,4)$ i długość małej osi równą 10,
(iii) równania kierownic $x=\pm 8$ i długość małej osi równą 8.

Zadanie 7.8

(a) ([13], str. 116) Określić położenie punktów:

(i) $A(4,1), B(1,-2), C(\sqrt{2},1)$ względem hiperboli $x^2-y^2=1$,
(ii) $A(1,-3), B(2,0), C(3,-2), D(\sqrt{3},0)$ względem hiperboli $x^2-3y^2=6$.

Wykonać rysunki.

(b) ([13], str. 116) Napisać równania asymptot hiperboli $5x^2-y^2=10$.

(c) (([3], str. 87), [13], str. 116) Znaleźć równania kanoniczne hiperboli wiedząc, że

(i) oś rzeczywista równa się 12 i punkt $(8,3)$ leży na hiperboli,
(ii) oś urojona równa się 6 i punkt $(4,5)$ leży na hiperboli,
(iii) oś rzeczywista równa się 12 i mimośród równa się $3/2$,
(iv) punkty $F_1(-10,0)$ i $F_2(10,0)$ są ogniskami i hiperbola przechodzi przez punkt $(12,3\sqrt{5})$,
(v) odległość między ogniskami równa się 8, a odległość między kierownicami równa się 6.

(d) ([3], str. 90) Sprowadzić równanie $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$ do postaci

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}-\frac{(y-d)^2}{b^2}=1.$$

Narysować tę krzywą. Jak sprawdzić, że to jest hiperbola?

Zadanie 7.9

(a) ([13], str. 119) Określić położenie ognisk parabol i wykonać rysunek

$$y^2=4x, \qquad x^2=4y, \qquad y^2=-8x.$$

(b) ([13], str. 119) Napisać równanie kierownicy paraboli $y^2=6x$.

(c) ([13], str. 119, [3], str. 92) Napisać równanie kanoniczne paraboli wiedząc, że

(i) odległość ogniska od wierzchołka równa się 3,
(ii) odległość ogniska od kierownicy równa się 2,
(iii) parabola przechodzi przez punkt $(1, -4)$.
(iv) parabola jest symetryczna względem osi Oy, przechodzi przez początek układu współrzędnych i przez punkt $(6, -2)$.

(d) ([3], str. 94) Sprowadzić równanie $y^2-10x-2y-19 = 0$ do postaci $(y-a)^2 = p(x-b)$ i narysować krzywą na płaszczyźnie. Jak sprawdzić, że to jest parabola?

Lista siódma - zadania uzupełniające

Zadanie 7.10

(a) Równanie parametryczne prostej l: $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct \quad (t \in \mathbb{R})$, można zapisać w postaci następujących zależności (jest to *równanie kierunkowe prostej* l):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Podać równania ogólne dwóch przykładowych płaszczyzn, których przecięciem jest prosta l ([1], str. 145).

(b) Podać przykład dwóch płaszczyzn, których przecięciem jest prosta $l : x = 7 - 4t,\ y = -5-2t,\ z = 5+t \quad (t \in \mathbb{R})$. Czy te płaszczyzny są określone jednoznacznie?

Zadanie 7.11

Niech dane będzie równanie ogólne płaszczyzny π: $Ax + By + Cz + D = 0$, punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ leżący na płaszczyźnie π oraz równanie parametryczne prostej l_1 leżącej na płaszczyźnie π.

(i) Jak wyznaczyć równanie parametryczne prostej l_2 leżącej na płaszczyźnie π, przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do prostej l_1?
(ii) Czy te warunki określają prostą l_2 jednoznacznie? Czy któryś z warunków jest zbędny? Wymienić minimalną liczbę warunków niezbędnych, żeby móc wyznaczyć równanie kierunkowe prostej l_2.
(iii) Jak na podstawie równania ogólnego płaszczyzny π i równania parametrycznego leżącej na niej prostej l_2 można wyznaczyć równanie krawędziowe prostej l_2?

Wskazówka. Trzeba znaleźć równanie płaszczyzny π_2 takiej, że przecięciem płaszczyny π przez π_2 jest prosta l_2. Czy płaszczyzna π_2 jest tylko jedna? Do czego może sie przydać wyznaczenie dwóch punktów leżących na prostej l_2?

Zadanie 7.12

([14], str. 188) Znaleźć równanie parametryczne prostej l_1 leżącej na płaszczyźnie π: $x + 2y + 3z = 0$ i przechodzącej przez punkt przebicia płaszczyzny π przez prostą

$$l_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$$

i prostopadłej do l_2.

Zadanie 7.13

(a) ([1], str. 147) Znaleźć odległość między płaszczyznami równoległymi $3x-4y+z=1$ i $6x-8y+2z=3$. *Wskazówka.* Wyznaczyć prostą prostopadłą do tych płaszczyzn i punkty przebicia płaszczyzn przez wyznaczoną prostą.

(b) ([3], str. 133) Dany jest punkt $P(3,-1,2)$. Obliczyć współrzędne punktów symetrycznych do tego punktu względem osi układu i względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 7.14

([1], str. 529) Niech trzy różne punkty na płaszczyźnie

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_3)$$

nie będą współliniowe. Wówczas istnieje okrąg $c_1(x^2+y^2)+c_2x+c_3y+c_4=0$, na którym te punkty leżą. Podstawiając współrzędne tych trzech punktów do równania okręgu, otrzymamy jednorodny układ równań liniowych, którego niewiadomymi są współczynniki c_1,c_2,c_3,c_4. Wzorując się na sposobie znajdowania na przykład równania płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty uzasadnić, dlaczego następujące równanie jest równaniem wyżej określonego okręgu

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Znaleźć równanie okręgu, na którym leżą następujące trzy punkty: $(1,7)$, $(6,2)$, $(4,6)$.

Zadanie 7.15

(a) Wyprowadzić warunek na to, by prosta $Ax+By+C=0$ była styczna do elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(b) ([19], str. 224) Zbadać położenie prostej $x-2y+k=0$ względem elipsy $9x^2+4y^2=36$ z zależności od wartości parametru k.

(c) ([3], str. 83) Znaleźć miejsce geometryczne środków cięciw poprowadzonych z końca małej osi elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(d) ([13], str. 113) Obliczyć długość boku kwadratu wpisanego w elipsę $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

(e) Niech $x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Sprawdzić, że powyższe równanie parametryczne określa elipsę.

Zadanie 7.16

(a) ([13], str. 119) Znaleźć równanie miejsca geometrycznego środków cięciw hiperboli $9x^2-16y^2=144$ równoległych do prostej $3x-2y=12$.

(b) Sprawdzić, czy równanie parametryczne

$$x=\frac{a}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big),\quad y=\frac{b}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big),\quad t\in\mathbb{R},$$

określa hiperbolę $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Zadanie 7.17

(a) ([13], str. 120) Przez ognisko paraboli $y^2 = 2px$ poprowadzono cięciwę prostopadłą do osi paraboli. Obliczyć długość tej cięciwy.

(b) ([13], str. 120) W parabolę wpisano trójkąt równoboczny, mający wierzchołek w wierzchołku paraboli. Napisać równania boków tego trójkąta.

Lista ósma - Struktury algebraiczne, grupy

Sprawdzanie, czy zbiór z danym działaniem algebraicznym jest grupą.

Pytania

1. Co to jest element neutralny działania algebraicznego? Czy w grupie taki element zawsze istnieje i czy jest jednoznaczny?
2. Jaka macierz jest elementem neutralnym mnożenia macierzy?
3. Czy w grupie każdy element ma element odwrotny? Czy jest on określony jednoznacznie?
4. Co to jest prawo skracania w grupie?
5. Czy działanie w grupie musi być przemienne?
6. Czy w grupie prawdziwa jest implikacja $ab = ac \Longrightarrow b = c$?
7. Jak w grupie rozwiązać równanie $ax = b$ dla danych elementów a i b?
8. Jak uzasadnić, że w dowolnej grupie prawdziwe są wzory: $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ oraz $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$? Czy grupach abelowych prawdziwy jest wzór $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?

Lista ósma - zadania podstawowe

Zadanie 8.1

([2], str. 11) Które z następujących zbiorów liczb są grupami względem dodawania liczb:

(i) zbiór liczb rzeczywistych,
(ii) zbiór liczb wymiernych,
(iii) zbiór liczb naturalnych,
(iv) zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez ustaloną liczbę naturalną $n \neq 0$,
(v) zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $|x| < 2$?

Zadanie 8.2

([2]) Które z następujących zbiorów liczb są grupami ze względu na mnożenie liczb:

(i) zbiór liczb rzeczywistych,
(ii) zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,
(iii) zbiór liczb wymiernych różnych od zera,
(iv) zbiór dwuelementowy $\{-1, 1\}$,
(v) zbiór wszystkich potęg 3^k liczby 3, gdzie k jest liczbą całkowitą?

Zadanie 8.3

Czy zbiór wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest grupą ze względu na dodawanie wektorów?

Zadanie 8.4 ([2])

Udowodnić, że wzór $x \oplus y = xy + 1$ określa w zbiorze liczb rzeczywistych działanie, które nie jest łączne.

Zadanie 8.5

Wykazać, że w dowolnej grupie $\mathcal{G}$ zachodzi równość $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$.

Zadanie 8.6

(a) ([18]) str. 37 Sprawdzić, że zbiór macierzy stopnia 2 postaci

$$\begin{bmatrix} (-1)^a & a \\ 0 & (-1)^a \end{bmatrix},$$

gdzie a jest liczba całkowitą, tworzy grupę abelową względem mnożenia macierzy.

(b) Niech $\mathcal{G}$ będzie zbiorem rzeczywistych macierzy kwadratowych A ustalonego stopnia n o wyznaczniku równym 1 lub -1. Sprawdzić, czy ten zbiór jest grupą ze względu na mnożenie macierzy.

(c) Niech $\mathcal{G}$ będzie grupą, ze względu na mnożenie macierzy, wszystkich macierzy rzeczywistych nieosobliwych stopnia n. Czy w $\mathcal{G}$ istnieją takie macierze A i B, że ich iloczyn jest równy macierzy zerowej? Z jakich własności grupy wynika ta odpowiedź?

(d) ([15], str. 56) Sprawdzić, czy zbiór ośmiu macierzy (przypomnienie $i = \sqrt{-1}$)

$$\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

tworzy grupę ze względu na mnożenie macierzy.

Zadanie 8.7

([2], str. 29) Pokazać, że zbiór obrotów na płaszczyźnie dokoła ustalonego punktu o kąty $0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$ tworzy grupę ze względu na złożenie obrotów.

Zadanie 8.8

([15], str. 61) Niech zbiór $\mathbb{G}$ zawiera wszystkie potęgi liczby zespolonej $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Ile elementów ma ten zbiór? Czy jest grupą ze względu na mnożenie liczb zespolonych?

Zadanie 8.9

W zbiorze $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ działaniem jest dodawanie modulo n, tzn. parze liczb z tego zbioru przyporządkowuje się resztę z dzielenia ich sumy przez n. Ułożyć tabelkę dla dodawania modulo 5 i uzasadnić, że $\mathbb{Z}_5$ jest grupą abelową. Sprawdzić na przykładach, że liczba $5 - k$ jest elementem przeciwnym do $k \in \mathbb{Z}_5$.

Lista ósma - zadania uzupełniające

Zadanie 8.10

(a) ([2]) W zbiorze liczb całkowitych określamy działanie $a \odot b = a + b + 2$. Czy zbiór liczb całkowitych tworzy grupę względem tego działania?

(b) Udowodnić, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi takimi, że $a^2 + b^2 > 0$, jest grupą ze względu na mnożenie liczb. *Uwaga.* Wykorzystać fakt, że liczba $\sqrt{2}$ nie jest wymierna.

Zadanie 8.11

(a) Niepusty podzbiór grupy, który jest grupą ze względu na działanie grupowe, nazywamy *podgrupą*. Sprawdzić, czy zbiór $n\mathbb{Z}$ liczb całkowitych podzielnych przez ustaloną liczbę naturalną $n \neq 0$ jest podgrupą grupy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z dodawaniem.

(b) Udowodnić, że niepusty podzbiór $\mathcal{H}$ grupy $\mathcal{G}$ jest jej podgrupą wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek:

$$\text{dla każdego} \quad a, b \in \mathcal{H} \text{ mamy } ab^{-1} \in \mathcal{H}.$$

Zadanie 8.12

(a) ([18], str. 37) Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0 i 1. Rozpatrzmy zbiór następujących funkcji f_j, określonych na $\mathcal{S}$ i przyjmujących wartości w $\mathcal{S}$:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_3(x) = \frac{x-1}{x},$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x}, \quad f_5(x) = 1 - x, \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Sprawdzić, że złożenie funkcji jest działaniem w zbiorze $\{f_1, \ldots, f_6\}$. Czy jest to grupa abelowa? *Uwaga.* $(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$.

(b) Permutacja zbioru $\mathbf{P}_n = \{1, \ldots, n\}$ jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym $\mathbf{P}_n$ na $\mathbf{P}_n$. Czy złożenie dwóch permutacji, traktowanych jako funkcje, jest działaniem w tym zbiorze? Jaka permutacja jest elementem neutralnym? Czy zbiór permutacji jest grupą?

Zadanie 8.13

([2], str. 15) Wykazać, że wszystkie izometrie trójkąta równobocznego tworzą grupę ze względu na złożenie izometrii. Czy jest to grupa abelowa?

Lista dziewiąta - Zastosowania algebry i geometrii analitycznej w technice

Przykłady zastosowań algebry i geometrii analitycznej w technice.

Zadanie 9.1 ([13], str. 214)

W dwóch punktach $A(1,5,0)$ i $(5,1,8)$ umieszczono ciężary $P_A = 400N$ i $P_B = 100N$. Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości $C(x_0, y_0, z_))$ danego układu dwóch ciężarów. *Wskazówka.* Środek ciężkości $C(x_0, y_0, z_0)$ dzieli odcinek AB w stosunku do przyłożonych ciężarów (odwrotnie proporcjonalnie):

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{P_B}{P_A}.$$

Wykazać, że na przykład $x_0 = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$. Obliczenia wykonać też dla $P_A = 300N$, $P_B = 50N$, $A(3,2,-7), B(-1,-3,-1)$. *Odp.* Współrzędne środka ciężkości: $(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5})$.

Zadanie 9.2 ([13], str. 218)

Pod wpływem działania siły stałej $\mathbf{F} = [5,-2,4]$ zostało przesunięte pewne ciało z punktu $A(1,-1,3)$ do punktu $B(3,-2,5)$. Obliczyć pracę W siły $\mathbf{F}$. *Wskazówka.* Pracę W siły $\mathbf{F}$ na odcinku drogi o długości $r = |AB|$ wyraża wzór $|F|\,|AB|\cos\phi$, gdzie ϕ jest kątem między wektorami $\mathbf{F}$ i AB. Zatem praca W jest iloczynem skalarnym wektorów $\mathbf{F}$ i AB. Obliczenia powtórzyć dla danych $\mathbf{F} = [2,-3,-1]$ i $A(1,1,3), B(5,1,-1)$. *Odp.* Praca $W = 20$ (jednostek pracy).

Zadanie 9.3 ([13], str. 218)

Znaleźć miarę bezwględną momentu siły $\mathbf{F} = [5,3,-1]$ przyłożonej w punkcie $A(-1,2,4)$ względem punktu $B(1,1,2)$. *Wskazówka.* Niech $r = BA$. Wówczas moment siły $\mathbf{F}$ względem punktu B możemy określić następującym wzorem za pomocą iloczyn wektorowego $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{R}$. Miara bezwględna momentu równa się długości $|\mathbf{F} \times BA|$. *Odp.* Miara bezwzględna momentu $\mathbf{M}$ wynosi $M = 3\sqrt{26}$ jednostek momentu.

Zadanie 9.4 ([13], str. 277)

Dane jest równanie płaszczyzny $p: \; x + y - z + 3 = 0$ zwierciadła oraz prosta l przechodząca przez punkt $A(2,0,1)$ i równoległa do wektora $\mathbf{v} = [-1,2,5]$, wzdłuż której biegnie promień padający światła. Wyznaczyć równanie prostej, wzdłuż której biegnie promień odbity. *Odp.* $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{14} = \frac{z-6}{7}$.

Zadanie 9.5 ([13], str. 275)

Płaszczyzna $p: \; x + y + z - 1 = 0$ rozgranicza dwa różne pod względem optycznym środowiska. Promień światła biegnący z punktu $A(1,-3,1)$ pada na płaszczyznę p w punkcie $B(1,-1,1)$ i po załamaniu trafia w drugim środowisku na pewne ciało w punkcie $C(4,2,2)$. Wyznaczyć współczynnik załamania dla drugiego ośrodka względem ośrodka, w którym znajduje się punkt A. *Wskazówka.* Promień światła biegnący wzdłuż prostej l w pierwszym środowisku przenika przez płaszczyznę rozgraniczającą, ulegając załamaniu pod kątem α_2. Zgodnie z prawem załamania współczynnik załamania n dla środowiska drugiego względem środowiska pierwszego wynosi $n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$, gdzie α_1 jest kątem padania promiennia świetlnego na płaszczyznę p. *Odp.* $n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{23}}$.

Zadanie 9.6 ([13], str. 277)

Płytę ograniczoną dwoma płaszczyznami $3x - y + z - 1 = 0$ i $3x - y + z = 0$ przebija pocisk biegnący wzdłuż odcinka o równaniach $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Wyznaczyć średni opór płyty, wiadząc, że prędkość pocisku przed zetknięciem się z płytą wynosiła $V_1 = 600m/s$ i po wyjściu z płyty $V_2 = 450m/s$. Masa pocisku równa się $M = 0.25\ kg$. Jednostką odmierzaną na osiach jest 1 m. *Wskazówka.* Średnią wartością oporu F płyty wyznaczamy z następującego związku

$$Fs = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}M,$$

gdzie s jest długością drogi przebytej przez pocisk w płycie. *Odp.* $F = 16875N$.

Zadanie 9.7 ([13], str. 68)

W płaszczyźnie Oxy znajdują się dwa ładunki elektryczne $Q_A = 2C$ i $Q_B = -\sqrt{3}C$ skupione w punktach $A(-1, 1)$ i $B(2, 0)$. Wyznaczyć równanie linii leżącej w płaszczyźnie Oxy, w punktach której potencjał pola elektrostatycznego wytworzonego przez dane dwa ładunki równa się 0. *Wskazówka.* Wartość potencjału dowolnego punktu M płaszczyzny Oxy pola elektrostatycznego wytworzonego przez dwa ładunki elektryczne Q_A i Q_B skupione w punktach $A(x_A, y_B)$ i $B(x_B, y_B)$ określa wzór

$$V(x, y) = k\frac{Q_A}{r_{MA}} + k\frac{Q_B}{r_{MB}},$$

gdzie k jest stałą zależną od jednostek

$$r_{MA} = \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}, \quad r_{MB} = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2}.$$

Odp. Okrąg $(x - 16)^2 + (y + 3)^2 = 152$.

Zadanie 9.8 ([13], str. 122)

Łuk pewnej bramy wjazdowej ma kształt paraboli $y = -x^2 + 10$, $y > 0$. Wyznaczyć maksymalną wysokość H pojazdu o szerokości $a = 4\ m$ mającego przejechać przez bramę, jeżeli przekrój pojazdu jest prostokątem. *Wskazówka.* Oś symetrii bramy pokrywa się z osią Oy. *Odp.* $H = 6\ m$.

Zadanie 9.9 ([13], str. 110)

Przekrój poprzeczny wydrążonej belki, występującej w pewnej konstrukcji, stanowi obszar ograniczony dwiema elipsami o wspólnych osiach symetrii. Równanie większej elipsy jest następujące $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Wyznaczyć równanie elipsy mniejszej, jeżeli wiadomo, że grubość belki liczona wzdłuż osi Ox jest równa grubości wzdłuż osi Oy i jeżeli pole rozważanego przekroju wynosi $s = 8\pi\ cm^2$. *Wskazówka.* Pole wnętrza elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ określa wzór $s = 4ab\pi$. *Odp.* Równanie mniejszej elipsy ma postać $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Zadanie 9.10 ([3], str. 78)

Południk ziemski ma kształt elipsy; stosunek jej osi równa się 299/300. Wyznaczyć mimośród południka ziemskiego. *Odp.* $e \approx 0.08$.

Zadanie 9.11 ([13], str. 121)

Wyznaczyć równanie toru punktu poruszającego się ruchem złożonym z dwóch ruchów harmonicznych określonych równaniami $x = 8\cos\omega t$ i $y = \sin\omega t$, gdzie ω jest pulsają, t czasem. *Odp.* $\frac{x^2}{64} + y^2 = 1$.

Lista dziesiąta - Powtórka

Powtórzenie wybranych tematów z całego kursu

Zadanie 10.1

(a) Wykazać, że $\arg \frac{1}{z} = \arg \bar{z}$.

(b) Rozwiązać równanie $|z| - z = 1 + 2i$.

(c) ([15], str. 72) Zapisać w postaci algebraicznej liczbę

$$z = \Big(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\Big)^{12}.$$

(d) ([9], str. 79) Podać interpretację geometryczną następujących zbiorów liczb zespolonych:

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\frac{1}{z} \leqslant 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < |z|\}.$$

(e) Niech liczba zespolona z_1 ma część urojoną różną od zera. Udowodnić, że

$$\Big|\frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}\Big| = 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy z jest liczba rzeczywistą.

(f) ([15], str. 78) Niech z i w będą liczbami zespolonymi. Uzasadnić tożsamość

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

i podać jej interpretację geometryczną.

Zadanie 10.2

(a) ([15], str. 74) Zapisać w postaci trygonometrycznej wszystkie pierwiastki

$$\sqrt[4]{-\frac{32}{9(1 - i\sqrt{3})}}.$$

(b) Obliczyć wszystkie pierwiastki szóstego stopnia z jedynki i zaznaczyć je na płaszczyźnie.

(c) Rozwiązać równanie $z^4 - 3z^2 + 4 = 0$.

Zadanie 10.3

(a) ([15], str. 82) Skonstruować wielomian najmniejszego stopnia o współczynnikach zespolonych mający podwójny pierwiastek 1 oraz pierwiastki pojedyńcze $2, 3, 1+i$. Przez jaki wielomian należy pomnożyć wyznaczony wielomian, aby skontruować wielomian najmniejszego stopnia o współczynnikach rzeczywistych mający powyższe pierwiastki?

(b) ([12], str. 49) Bez wykonywania dzielenia znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^6 + x - 50$ przez wielomian $u(x) = x^3 + 8$.

(c) ([10], str. 42) Wielomian $x^6 + 64$ rozłożyć na czynniki rzeczywiste nierozkładalne.

(d) ([19], część B) Rozłożyć funkcję wymierną na sumę rzeczywistych ułamków prostych

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2x^2}.$$

(e) Niech $w(x)$ będzie rzeczywistym wielomianem stopnia 5 ze współczynnikiem 1 przy najwyższej potędze i niech liczby $x_1 = -1, x_2 = 1 - \sqrt{2}i, x_3 = 1 + \sqrt{2}i$ będą jego pierwiastkami jednokrotnymi.

(i) Podać pozostałe pierwiastki wielomianu $w(x)$.

(ii) Przedstawić wielomian $w(x)$ w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych nierozkładalnych.

(iii) Na sumę jakich rzeczywistych ułamków prostych można rozłożyć funkcję wymierną $(x+3)/w(x)$ (nie wyznaczać współczynników tego przedstawienia)?

Zadanie 10.4

([1], str. 485) W mechanice kwantowej macierze

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nazywają się *macierzami Diraca*. Udowodnić następujące własności macierzy Diraca:

(a) $B^2 = A_x^2 = A_y^2 = A_z^2 = I$,

(b) macierze Diraca są parami antyprzemienne, tzn. np. $BA_x = -A_xB$, $A_yA_z = -A_zA_y$ itd.

Zadanie 10.5

([1], str. 64) Znaleźć macierz X taką, by $AXB = C$ dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10.6

(a) Bez bezpośredniego obliczania wyznacznika uzasadnić, dlaczego jest on równy zero

$$\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}.$$

(b) ([19], str. 93) Wyznaczyć wielomian $w(x)$ określony przez następujący wyznacznik

$$w(x) = \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}$$

i rozwiązać nierówność $w(x) > 0$.

(c) ([1], str. 55) Pokazać, że macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

nie jest odwracalna dla dowolnych wartości parametrów a, b, c, d, e, f, g, h.

(d) ([19], str. 94) Wyznaczyć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10.7

(a) Zbadać, dla jakich wartości parametru z istnieje macierz odwrotna P^{-1} dla

$$P = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & -6 & a+z \end{bmatrix}.$$

Obliczenia wykonać dla $a = 5$ i $a = 0$. Wyznaczyć P^{-1}, jeśli istnieje.

(b) Rozwiązać następujący układ równań macierzowych

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i obliczyć XY. Zbadać, czy istnieje $(XY)^{-1}$.

(c) ([10], str. 42) Znaleźć macierz X spełniającą zależność

$$PXP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10.8

(a) ([1], str. 33) Rozwiązać następujące równanie macierzowe ze względu na a, b, c i d

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Czy to rozwiązanie jest jednoznaczne?

(b) ([15], str. 25) Zbadać, czy układ równań ma rozwiązanie

$$-9x_1+10x_2+3x_3+7x_4 = 7, \quad -4x_1+7x_2+x_3+3x_4 = 5, \quad 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4 = 3.$$

Jeśli tak, to wyznaczyć rozwiązanie.

(c) ([19], str. 84) W zależności od parametru p podać warunki rozwiązalności i rozwiązać (o ile rozwiązanie istnieje) układ równań

$$px_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 + px_2 + x_3 = p, \quad x_1 + x_2 + px_3 = p^2.$$

(d) ([19], str. 85) Dla jakich wartości parametru k układ równań jednorodnych

$$x_1 + kx_2 - 3x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad 3x_1 + kx_2 - x_3 = 0$$

ma rozwiązanie niezerowe? Po znalezieniu wartości k rozwiązać ten układ. Czy do jego rozwiązania można zastosować wzory Cramera?

(e) ([14], str. 170) Zbadać rozwiązalność układu w zależności od wartości parametru λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + \lambda x_3 + 3x_4 = \lambda \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = \lambda - 1 \end{cases}.$$

(f) ([19], str. 102) Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3. \end{aligned}$$

Zadanie 10.9

(a) Pokazać, że środkowe trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ przecinają się w punkcie

$$S\Big(\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)\Big).$$

(b) ([1], str. 135) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(1, 0, 1), B(0, 2, 3), C(2, 1, 0)$.

(c) ([1], str. 134) Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{\mathbf{u}} = [2, -6, 2], \vec{\mathbf{v}} = [0, 4, -2], \vec{\mathbf{w}} = [2, 2, -4]$.

Zadanie 10.10

(a) ([1], str. 135) Znaleźć wszystkie wektory o długości 1 równoległe do płaszczyzny Oyz i prostopadłe do wektora $[3, -1, 2]$.

(b) ([1], str. 135) Znaleźć wektor $\vec{\mathbf{n}}$ prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A(0, -2, 1), B(1, -1, -2), C(-1, 1, 0)$.

(c) ([3], str. 145) Sprawdzić, czy dane cztery płaszczyzny mają wspólny punkt

$$5x - z + 3 = 0, \quad 2x - y - 4z + 5 = 0, \quad 3y + 2z - 1 = 0, \quad 3x + 4y + 5z - 3 = 0.$$

(d) ([19], str. 192) Dla jakich wartości parametrów a i b trzy płaszczyzny

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y - z + b = 0, \quad x + ay - 6z + 10 = 0$$

(i) nie mają punktu wspólnego,
(ii) maja dokładnie jeden punkt wspólny,
(iii) mają nieskończenie wiele punktów wspólnych zależnych od jednego parametru,
(iv) pokrywają się?

(e) ([19], str. 195) Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(-3, 2, 1)$ i zawierającej prostą

$$l : \begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ x + 2y + 3z + 8 = 0 \end{cases}.$$

(f) ([1], str 145) Znaleźć równanie ogólne płaszczyzny zawierającej prostą $l : x = -1+3t,\ y = 5+2t,\ z = 2-t \quad (t \in \mathbb{R})$ i prostopadłej do płaszczyzny $2x-4y+2z = 9$.

(g) ([1], str. 146) Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(2, -1, 4)$ i prostopadłej do prostej l będącej przecięciem dwóch płaszczyzn: $4x + 2y + 2z = -1,\ 3x + 6y + 3z = 7$.

Zadanie 10.11

([3], str. 150) Jaki warunek muszą spełniać współczynniki równania krawędziowego prostej

$$l : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases},$$

aby prosta l:

(i) była równoległa do osi Ox,
(ii) przecinała oś Oy,
(iii) pokrywała się z osią Oz,
(iv) była równoległa do płaszczyzny Oyz,
(v) leżała na płaszczyźnie Oxz,
(vi) przechodziła przez początek układu współrzędnych?

Zadanie 10.12

(a) Znaleźć równanie parametryczne prostej l będącej przecięciem dwóch płaszczyzn:

$$l : \begin{cases} 7x - 2y + 3z = -2, \\ -3x + y + 2z + 5 = 0 \end{cases}.$$

(b) ([1], str. 144) Zbadać, czy prosta $l : x = -5 - 4t,\ y = 1 - t,\ z = 3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R})$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + 2y + 3z - 9 = 0$.

(c) ([1], str. 145) Zbadać, czy prosta $l : x = 0,\ y = t, z = t \quad (t \in \mathbb{R})$ leży na płaszczyźnie $\pi : 6x + 4y - 4z = 0$.

(d) ([3], str. 155) Na prostej $l : x = t, y = -7 + 2t, z = 3 - t \quad (t \in \mathbb{R})$ znaleźć punkt najbliżej położony punktu $P(3, 2, 6)$.

Zadanie 10.13

(a) ([1], str. 147) Obliczyć odległość punktu $P(3, 1, -2)$ od płaszczyzny $x+2y-2z = 4$.

(b) ([19], str. 191) Znaleźć cosinusy kątów między płaszczyznami π_1 i π_2

$$\pi_1 : x - y + z - 3 = 0, \quad \pi_2 : 2x + y + 2z - 3 = 0.$$

Zadanie 10.14

(a) ([13], str. 63) Znaleźć współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt, jeżeli równania prostych tworzących boki trójkąta są następujące: $x - 4 = 0,\ 3x - 4y + 36 = 0,\ 4x + 3y + 23 = 0$.

(b) ([15], str. 79) Przedstawić na płaszyźnie zbiór punktów odpowiadających liczbom zespolonym $z = \frac{1+it}{1-it}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. *Wskazówka.* Przyjąć $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ dla $-\pi < \varphi < \pi$ i pokazać, że wzory na część rzeczywistą i część urojoną liczb zespolonych z spełniających powyższy warunek określają równanie parametryczne okręgu (zob. jedno z zadań uzupełniających z listy 7).

Zadanie 10.15

(a) ([13], str. 113) Napisać równanie kanoniczne elipsy, dla której odległości jednego z ognisk od końców osi wielkiej wynoszą 7 i 1.

(b) ([3], str. 78) Znaleźć równanie elipsy wiedząc, że odległość między kierownicami jest cztery razy większa od odległości między ogniskami.

(c) ([13], str. 112) Obliczyć pole prostokąta wpisanego w elipsę

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

wiedząc, że dwa boki przeciwległe prostokąta przechodzą przez jej ognisko.

Zadanie 10.16

(a) ([13], str. 117) Napisać równanie hiperboli, która ma ogniska wspólne z elipsą

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$$

i mimośród 5/4.

(b) ([3], str. 86) Dana jest hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Obliczyć współrzędne ognisk hiperboli i mimośród hiperboli. Znaleźć równania asymptot i kierownic hiperboli.

(c) ([13], str. 117) Dana jest hiperbola $x^2 - y^2 = 8$ Znaleźć równanie hiperboli przechodzącej przez punkt $(-5, 3)$, mającej te same ogniska co dana hiperbola.

Zadanie 10.17

(a) ([3], str. 92) Napisać równanie paraboli, wiedząc że parabola jest symetryczna względem osi Oy, ognisko znajduje się w punkcie $(0, 2)$, a wierzchołek paraboli pokrywa się z początkiem układu współrzędnych. Narysować parabolę.

(b) ([19], str. 226) Znaleźć cięciwę paraboli $y^2 = 4x$ równoległą do prostej $y = 2x$ i mającą długość 5.

Zadanie 10.18

(a) Udowodnić, że jeżeli wszystkie elementy macierzy A są całkowite, a jej wyznacznik jest równy 1, to wszystkie elementy macierzy odwrotnej A^{-1} są całkowite. Czy zbiór tych macierzy jest grupą ze względu na mnożenie macierzy?

(b) Dana jest grupa wszystkich izometrii własnych prostokąta. Wyznaczyć jej podzbiory, które same są grupami (czyli wyznaczyć podgrupy).

Opracowała: Krystyna Ziętak