

Liczby w moim życiu i w komputerze

Krystyna Ziętak



Jak świat może się zmienić w ciągu życia jednego człowieka?

Wirtualne Cafe UTW, Wrocław 21 marca 2021

Klub dyskusyjny słuchaczy

Uniwersytetu Trzeciego Wieku w UWr

Spis treści

- 1 Liczby w moim życiu
- 2 Liczby w systemie dziesiętnym
 - System dziesiętny zmiennopozycyjny
 - Utrata cyfr znaczących
- 3 Liczby w komputerze
 - Oszczędności w bank
- 4 Przejdź od systemu dziesiętnego do dwójkowego
- 5 System dwójkowy zmiennopozycyjny
 - Standard IEEE 754
 - Epsilon maszynowy
- 6 Arytmetyka zmiennopozycyjna, Jak obliczać $a^2 - b^2$?



Witold Roter (pierwszy z prawej)
klasa siódma, Nowa Ruda 1957

- Mój pierwszy nauczyciel matematyki
- Potem profesor Uniwersytetu Wrocławskiego

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻



- UWr
tery
bry"



Stefan Paszkowski (pierwszy)
Andrzej Kiełbasiński (drugi)

- prof. Kiełbasiński, Uniwersytet Warszawski
zakochany w analizie błędów i algebrze numerycznej
przetłumaczył książkę Wilkinsona



Helmut Späth, Oldenburg (1986)

Moja pierwsza wizyta na "zachodnim" uniwersytecie (4 dni)

Druga wizyta (1988) dwa dni dłużej

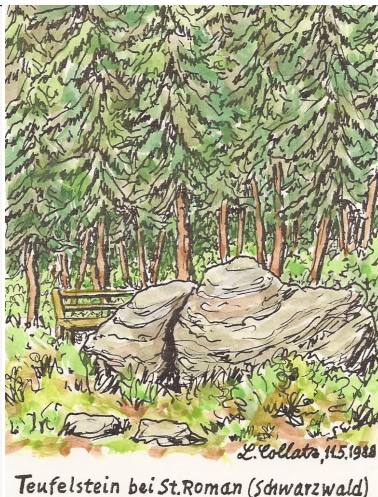


żona Spätha (1988)

Moja pierwsza konferencja na "zachodzie"
Manfred von Golitschek



G. Meinardus, W. Hayman, F. Deutsch, L. Collatz
Oberwolfach 1988



List i rysunek od Lothara Collatza, Oberwolfach 1988

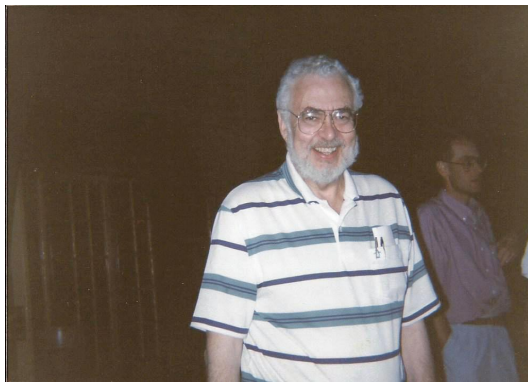
Sympozja Householdera



Gatlingurg 1964

Wilkinson, Givens, Forsythe, Householder, Henrici, Bauer

Zdjęcie ze zbioru MathWorks

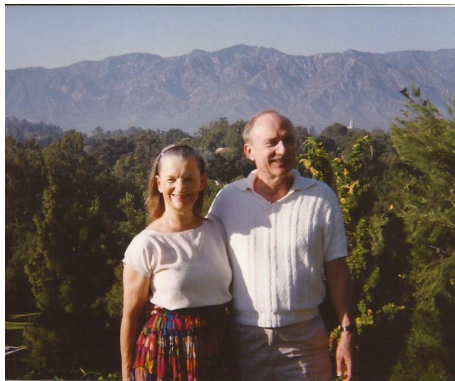


Moje pierwsze Householder Symposium
Lake Arrowhead koło Los Angeles (1993)
Gene Golub

Householder Symposium 1993



W. Proskurowski
Los Angeles, Beverly Hills



D. and Ch. Lawson
dzień ojca w Pasadenie



Dottie i Chuck Lawson w Polsce, 1994



Alpy i Householder Symposium, Pontresina (1996)

Householder Symposium Whistler koło Vancouver, Kanada (1999)



Walter Gander z żoną Heidi



Chandler Davis z żoną
syn Aaron, koncert Holly Cole we Wrocławiu



Ludwig Elsner, Jaroslav Zémanek (2000)

Wrocław



M. Overton z mamą

"Overton" hotel
Vancouver 1999

German–Polish Workshop for Young Researches

Będlewo 2006

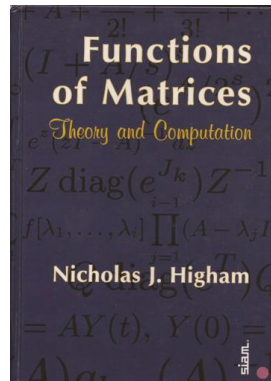
GAMM – Heike Fassbender, Volker Mehrmann, KZ



Volker Mehrmann
Whistler 1999



I. Wróbel, B. Laszkiewicz, A. Międlar
Będlewo 2006



Francoise Tisseur i Nick Higham
Householder Symposium, Berlin-Zeuthen 2008

Najważniejsza dla mnie książka



Manchester, 11 kwietnia 2013
siedem dni przed siedemdziesiątymi urodzinami

Mój referat urodzinowy - pomysł Nicka Highama

Dual Padé iterations and sentimental memories

Manchester 2013 - po referacie urodzinowym



Bhatia, Bini, Guo, Higham, Iannazzo, Ipsen, Meini, Poloni,
Simoncini, Tisseur, Trefethen, Van Loan i KZ

Boston 2001

Referat *Strict spectral approximation of matrices*
Hipoteza, której poświęciłam wiele lat życia



Gilbert Strang, MIT

zdjęcie ze strony domowej profesora

These are 121 cupcakes with my favorite $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrix. It was the day before Thanksgiving and two days before my birthday. A happy surprise.

Seniorka na Householder Symposium, Spa, Belgia 2014

Ostatnie Sympozjum Householdera, w którym brałam udział



Anne Greenbaum



Część druga

Liczby

- liczby całkowite: $0, 1, -1, 2, -2, \dots$
- liczby wymierne: $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{4}{3} = 1.333\dots$
- liczby niewymierne: $\sqrt{2} = 1.41421\dots$
- $\pi = 3.14159\dots$
- liczba Eulera $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281845\dots$
- liczby rzeczywiste
- liczby zespolone
- $i = \sqrt{-1}$, czyli $i^2 = -1$, czyli wielomian $x^2 + 1$ ma pierwiastek

Działania na liczbach

obcięcie lub zaokrąglenie
osterey cyfry znaczące

$$\begin{array}{r} 3.045 \\ + 0.0002517 \\ \hline 3.0452517 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.045 \\ + 0.0006105 \\ \hline 3.0456105 \\ \downarrow \\ 3.046 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.045 \\ + 0.00002517 \\ \hline 3.04502517 \end{array}$$

$$\boxed{3.045 * 0.1000 = 0.3045}$$

$$\boxed{3.045 * 0.1205 = 3045 * 1205 * 10^{-7} = 0.3669225}$$

$$\downarrow \\ 0.3669$$

Potęgowanie

$$\frac{1}{10} = 10^{-1} = 0.1$$

$$\frac{1}{100} * \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = 10^{-2} * 10^{-1} = 10^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = \left(10^{-1}\right)^2 = 10^{-2} = 0.01$$

System dziesiętny - liczby całkowite

$$102 = 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = (102)_{10}$$

$$(2503)_{10} = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

$$x = x_k \times 10^k + x_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + x_0 \times 10^0$$

$$x = (x_k x_{k-1} \dots x_0)_{10}$$

$$x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Liczby rzeczywiste (system dziesiętny)

$$102 = 10.2 \times 10^1 = 1.02 \times 10^2 = 0.102 \times 10^3$$

$$0.0102 = 0.102 \times 10^{-1}$$

$$0.102 = 1 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} = 0.102 \times 10^0$$

$$x = m \times 10^c$$

Zapis

$$x = mEc, \quad 102 = 0.102E3$$

Założenie:

Mantysa m jest liczbą rzeczywistą z przedziału $[0.1, 1)$.

Cecha (wykładnik) c jest liczbą całkowitą.

Utrata cyfr znaczących

$$x = 0.3721478693, \quad y = 0.3720230572$$

$$x - y = 0.0001248121 = 0.1248121 \times 10^{-3}$$

$$x - y \text{ po zaokrągleniu } \underline{0.12481} \times 10^{-3} = 0.00012481$$

pięć cyfr znaczących

$$\hat{x} = 0.37215, \quad \hat{y} = 0.37202$$

$$\hat{x} - \hat{y} = 0.00013 = \underline{0.13000} \times 10^{-3}$$

$$\left| \frac{(x - y) - (\hat{x} - \hat{y})}{x - y} \right| \approx 0.04 = 0.4 \times 10^{-1}$$

epsilon maszynowy $1 + \varepsilon > 1$

pięć cyfr znaczących

$$1.0000 + 0.01 = 1.0100 > 1$$

$$1.0000 + 0.0001 = 1.0001 > 1$$

$$1.0000 + 0.00001 = 1.00001 \quad \text{zaokrąglone do } 1.0000,$$

bo pięć cyfr znaczących

Przykład obliczeń w komputerze

Oszczędności w banku

5 procent za rok, $r = 0.05$

a_0 początkowy wkład

kwartalnie

$$a_1 = a_0 \times (1 + 0.05/4)$$

$$a_2 = a_1 \times (1 + 0.05/4) = a_0 (1 + 0.05/4)^2$$

$$a_3 = a_2 \times (1 + 0.05/4) = a_0 (1 + 0.05/4)^3$$

$$a_4 = a_3 \times (1 + 0.05/4) = a_0 (1 + 0.05/4)^4$$

$$f = a_0 \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

n razy w roku

dwa sposoby doliczania odsetek n razy w roku

$$f = a_0 \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

$$f = a_0 \times e^{n \ln (1+r/n)}$$

$$z = x^y = e^{(y \ln x)}$$

M. Overton, Courant Institute, Nowy Jork
pojedyncza precyzja obliczeń w komputerze
odsetki po roku

n	koncowe konto metoda I	koncowe konto metoda II
1	105.0000	105.0000
4	105.0945	105.0945
365	105.126 <u>8</u>	105.126 <u>7</u>
10000	105.129 <u>4</u>	105.127 <u>1</u>
20000	105.120 <u>2</u>	105.127 <u>1</u>

stan początkowy $a_0 = 100$

Liczby całkowite w systemie binarnym (dwójkowym)

Podstawa systemu: 2, cyfry 0, 1

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (101)_2$$

$$13 = 8 + 5 = 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (1101)_2$$

$$71 = 64 + 4 + 2 + 1 = 2^6 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$(1011)_2 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$$

Liczby rzeczywiste z przedziału $(0, 1)$ w systemie binarnym

Podstawa systemu: 2, cyfry 0, 1

$$0.75 = 0.5 + 0.25 = 2^{-1} + 2^{-2} = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (0.11)_2$$

$$0.625 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = (0.101)_2$$

$$(0.1011)_2 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

$$x = \frac{1}{10} = (2^{-4} + 2^{-5})(1 + 2^{-4} + 2^{-8} + \dots)$$

część całkowita	część ułamkowa
0	.1
$a_{-1} = 0$	.2
$a_{-2} = 0$	.4
$a_{-3} = 0$	.8
$a_{-4} = 1$	.6
$a_{-5} = 1$	.2
$a_{-6} = 0$	.4
$a_{-7} = 0$	.8
$a_{-8} = 1$	.6
itd	

stałe mnożymy przez 2

rozwiniecie okresowe

System dwójkowy (binarny) zmiennopozycyjny

Podstawa systemu: 2; cyfry: 0, 1

Rozpatrujemy stary model: mantysa m z przedziału $[0.5, 1)$

Do tego systemu należą liczby postaci

$$x = m \times 2^c, \quad \text{gdzie}$$

- mantysa m jest następującą liczbą

$$m = m_1 \times \frac{1}{2} + m_2 \times \frac{1}{4} + m_3 \times \frac{1}{8} + \cdots + m_t \times \frac{1}{2^t}$$

$$m_i \in \{0, 1\} \quad t \text{ jest ustalone}$$

- cecha (wykładnik) c jest liczbą całkowitą z ustalonego przedziału $[c_{min}, c_{max}]$

$$c_{min} \leq c \leq c_{max}$$

Przykład

Mantysa musi spełniać warunek: $0.5 \leq m < 1$

$$x = 5.5 = \frac{11}{2} = \frac{11}{16} \times 8 = 0.6875 \times 2^3$$

mantysa ma cztery bity: $m = 0.6875 = \frac{11}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

$$m = (0.6875)_{10} = (0.1011)_2$$

cecha: $c = 3 = 2 + 1$

$$c = (3)_{10} = (11)_2$$

$$x = 0.1011E11$$

Zaokrąglenie i obcięcie mantysy

$$x = \frac{1}{10} = \frac{8}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{5} \times 2^{-3} = 0.8 \times 2^{-3}$$

Mantysa jest okresowa, ma nieskończenie wiele bitów:

$$m = \frac{4}{5} = 0.8 = 0.1100110011001100 \dots$$

Cecha:

$$c = -3$$

$$m = \frac{4}{5} = 0.8 = 0.1100110011001100 \dots$$

Cecha: $c = -3$

Mantysa z $t = 4$ bitami, obcięcie

$$m = (0.1100)_2 = (0.75)_{10}$$

$$\tilde{x} = 0.75 \times 2^{-3} = \frac{3}{32} = 0.09375$$

Mantysa z $t = 4$ bitami, zaokr.

$$m = (0.1101)_2 = (0.8125)_{10}$$

$$\tilde{x} = 0.8125 \times 2^{-3} = \frac{13}{128} = 0.1015625$$

Przykład arytmetyki zmiennopozycyjnej dwójkowej z mantysą trzybitową z przedział $[0.5, 1)$

N.J. Higham, Accuracy and stability of numerical algorithms

$$t = 3, \quad c_{\min} = -1, \quad c_{\max} = 3$$

- mantysa z przedziału $[0.5, 1)$
- cecha - liczba całkowita z przedziału $[-1, 3]$

- mantysy: 0.100 0.101 0.110 0.111
- cechy: -1, 0, 1, 2, 3

**wszystkie nieujemne liczby zmiennopozycyjne
w tym systemie:**

- 0, 0.25 0.3125 0.3750 0.4375
- 0.5 0.625 0.75 0.875
- 1.0, 1.25 1.5 1.75
- 2.0, 2.5, 3.0 3.5
- 4.0 5.0 6.0 7.0

arytmetyka binarna (dwójkowa)

$$1 + 1 = 2 \rightarrow 01 + 01 = 10$$

$$4 + 2 = 6 \rightarrow 100 + 010 = 110$$

$$2 + 3 = 5 = 4 + 1 \rightarrow 01 + 11 = 101$$

$$1.001 + 0.001 = 1.010$$

Dodawanie liczb binarnych

$$x = 1 + \frac{1}{8} = 1.125 = (1.001)_2$$

$$y = \frac{1}{32} = 2^{-5} = 0.03125 = (0.00001)_2$$

suma $x + y$ obliczona w arytmetyce z mantysą 4-cyfrą równa się x , ponieważ

1.001

0.00001

1.001

William Kahan

laureat nagrody imienia Turinga
przyznanej w roku 1989 przez ACM za **IEEE standard 754**

IEEE standard 754 ustalił reguły
arytmetyki zmiennopozycyjnej w komputerze.

<http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/>

ACM: Association for Computing Machinery

IEEE: Institute of Electrical and Electronics Engineers

Floating-point arithmetic - standard IEEE 754

We współczesnych komputerach stosuje się arytmetykę binarną (dwójkową) z mantysą z przedziału $[1, 2)$

Taki model przyjęto w standardzie IEEE 754.

Dlatego pierwszy bit mantysy różny od zera jest przed przecinkiem.

Liczba rzeczywista x jest reprezentowana przez mantysę m i cechę c (wykładnik) zapisane binarnie.

$$x = m \times 2^c$$

$$x = m \times 2^c > 0, \quad \text{liczba rzeczywista}$$

$$m \quad \text{mantysa}, \quad c \quad \text{cecha}$$

- Cecha (wykładnik) jest liczbą całkowitą

$$c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$$

- Mantysa ma t bitów i jest liczbą rzeczywistą z przedziału $[1, 2)$.

Dlatego

$$m = 1 + m_1 2^{-1} + m_2 2^{-2} + \dots + m_{t-1} 2^{1-t} =$$

$$(m_0.m_1 m_2 \dots m_{t-1})_2$$

$$m_0 = 1, \quad m_1, \dots, m_{t-1} \in \{0, 1\}$$

Uwagi

- Nie zapamiętuje się jawnie w komputerze bitu m_0 , bo on jest zawsze równy 1.
- W komputerze zapamiętuje się (binarnie) cechę przesuniętą:

$$\tilde{c} = c + \textit{bias}, \text{ gdzie } \textit{bias} \text{ taki, że } \tilde{c} > 0$$

Na przykład, dla typu *single*:

$$c_{\min} = -126, \textit{bias} = 127,$$

więc zawsze $\tilde{c} = c + \textit{bias} > 0$.

W komputerze pamięta się cechę przesuniętą $\tilde{c}$, część ułamkową f oraz znak liczby.

znak	$\tilde{c}$	f
------	-------------	-----

Liczby zmiennopozycyjne - typ double

$$x = m \times 2^c \quad m = (1.f)_2$$

- część ułamkowa f mantysy ze znakiem 52 + 1 bitów,
- $u = 2^{-53} \approx 1.11 \times 10^{-16}$
(precyzja obliczeń-*unit roundoff*)
- $c_{\min} = -1022$, $c_{\max} = 1023$, $bias = 1023$
- zakres liczb: $\pm 10^{\pm 308}$

Typ double

$$x = \begin{cases} \pm(1.f)_2 \times 2^{\tilde{c}-1023} & \text{jesli } 0 < \tilde{c} < 2047 \\ \pm 0 & \text{jesli } \tilde{c} = 0, f = 0 \\ \pm \infty & \text{jesli } \tilde{c} = 2047, f = 0 \\ \text{NaN} & \text{jesli } \tilde{c} = 2047, f \neq 0 \\ \pm(0.f)_2 \times 2^{-1022} & \text{jesli } \tilde{c} = 0, f \neq 0 \end{cases}$$

denormalized (subnormal) numbers

typ single

- część ułamkowa f mantysy ze znakiem 23+1 bity,
- $c_{\min} = -126$, $c_{\max} = 127$, $bias = 127$
- zakres liczb: $\pm 10^{\pm 38}$
- precyzja obliczeń:

$$u = 2^{-24} \approx 5.96 \times 10^{-8}$$

Zasada w standardzie IEEE 754: Każde działanie arytmetyczne daje wynik. Wynikiem może to być NaN, $\pm\infty$

NaN: Not a Number

Wyjątki

	<i>przykład</i>	<i>wynik</i>
<i>niedozwolona operacja</i>	$0/0$	<i>NaN</i>
<i>niedozwolona operacja</i>	$0 \times \infty$	<i>NaN</i>
<i>niedozwolona operacja</i>	∞/∞	<i>NaN</i>
<i>niedozwolona operacja</i>	$\infty - \infty$	<i>NaN</i>
<i>niedozwolona operacja</i>	$\sqrt{-1}$	<i>NaN</i>
<i>nadmiar</i>		$\pm\infty$
<i>niedomiar</i>		<i>subnormal</i>
<i>dzielenie $x \neq 0$ przez zero</i>	$x/0$	$\pm\infty$

Podaj reprezentację liczby $u = 11$ w standardzie IEEE 754 w typie single

$$u = 11 = 8 + 2 + 1 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (1011)_2$$

$$u = 11 = \frac{11}{8} \times 2^3 = m \times 2^c$$

$$\text{mantysa } m = \frac{11}{8} = (1.011)_2 \in [1, 2)$$

$$\text{cecha (wykładnik) } c = 3 = (11)_2$$

$$\text{reprezentacja zmiennopozycyjna } u = (1.011)_2 E(11)_2$$

Ciąg dalszy przykładu

W standardzie IEEE 754 liczby w typie single są reprezentowane w komputerze za pomocą

- części ułamkowej f mantysy m
- "przesuniętej" cechy c (zapisanej binarnie, 8 bitów):
 $\tilde{c} = c + BIAS = c + 127 > 0$.

$$\tilde{c} = 3 + 127 = 130 = 128 + 2 = 2^7 + 2^1 = (10000010)_2$$

- Pamięta się też znak liczby, czyli znak mantysy (jeden bit).
- Mantysa ma 24 bity, część ułamkowa f ma 23 bity.

$$m = (1.011000000000000000000000)_2$$

$$f = 011000000000000000000000$$

Epsilon maszynowy

$$\varepsilon_{\text{mach}} = 2^{1-t}$$

t - liczba cyfr mantysy

Jest to odległość liczby 1 od najbliższej liczby
zmiennopozycyjnej w komputerze
większej niż 1

$$1 + \varepsilon_{\text{mach}} > 1$$

$\varepsilon_{\text{mach}}$ - inne stosowane oznaczenie *macheps*

$$\cos(1) = 5.403023E - 01,$$

$$\cos(1) \approx \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h} \equiv \textit{przybl}$$

$$\textit{blad} = \textit{przybl} - \cos(1)$$

double precision

h	$\textit{przybl}$	$\textit{blad}$
$1.0E - 02$	$5.360860E - 01$	$-4.216325E - 03$
$1.0E - 07$	$5.403023E - 01$	$-4.182769E - 08$
$1.0E - 08$	$5.403023E - 01$	$-2.969885E - 09$
$1.0E - 09$	$5.403024E - 01$	$+5.254127E - 08$
$1.0E - 10$	$5.403022E - 01$	$-5.848104E - 08$
$1.0E - 11$	$5.403011E - 01$	$-1.1668704E - 06$
$1.0E - 15$	$5.551115E - 01$	$+1.480921E - 02$
$1.0E - 20$	$0.000000E + 00$	$-5.4403023E - 01$

Oznaczenia:

- *fl* - floating point arithmetic
- *rd* - rounding

Błąd reprezentacji liczby w zmiennopozycyjnej arytmetyce dwójkowej

$$x = \pm(1 + m_1 2^{-1} + m_2 2^{-2} + \dots) 2^c, \quad m_j \in \{0, 1\}$$

Zakładamy, że mantysa jest t -bitowa

Jeśli pierwszy odrzucony bit mantysy, czyli m_t , jest zerem, to reprezentacją liczby x jest liczba:

$$\text{rd}(x) = \pm(1 + m_1 2^{-1} + m_2 2^{-2} + \dots + m_{t-1} 2^{-t+1}) 2^c$$

W przeciwnym razie, mantysę zaokrąglamy zgodnie z zasadami przyjętymi w standardzie IEEE 754. Wówczas

$$\text{rd}(x) = x(1 + \delta), \quad |\delta| \leq 2^{-t}$$

Niech $x = rd(x)$, $y = rd(y)$, czyli x i y są liczbami dokładnie reprezentowanymi w komputerze.

Standard IEEE 754 zakłada, że podstawowe działania na liczbach zmiennopozycyjnych komputerowych są wykonywane w komputerze tak, że

$$fl(x \square y) = (x \square y)(1 + \delta), \quad |\delta| \leq 2^{-t},$$

gdzie

- δ jest błędem względnym,
- $\square$ oznacza dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie,
- t jest liczbą cyfr mantysy.

Na przykład, dla typu single: $t = 24$.

Jak obliczać $a^2 - b^2$?

$$c = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Jak obliczać $y = \sqrt{x^2 + 1} - 1$?

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - 1 = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

Jak obliczać $c = \sqrt{a^2 + b^2}$?

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = |b| \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}$$

Jak obliczać pierwiastki trójmianu kwadratowego?

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{(-p + \sqrt{\Delta})(-p - \sqrt{\Delta})}{2(-p - \sqrt{\Delta})} = \frac{2q}{-p - \sqrt{\Delta}}$$

$$x_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$x_1 = \begin{cases} \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{2} & \text{jesli } p \leq 0 \\ \frac{2q}{-p - \sqrt{\Delta}} & \text{jesli } p > 0 \end{cases}$$

Dziękuję za uwagę



Charles Johnson

seniora wśród młodych

MAT-TRIAD, Będlewo koło Poznania, 2007